



**António Galvão Ramos
Manuel Pereira Lopes**

Ciência da Gestão de Inventários

Volume I

António Galvão Ramos
Manuel Pereira Lopes

Ciência da Gestão de Inventários

Center for Production and Logistics Optimization Technologies
Instituto Superior de Engenharia do Porto

Copyright © 2023 António Ramos and Manuel Lopes

PUBLISHED BY
CENTER FOR PRODUCTION AND LOGISTICS OPTIMIZATION TECHNOLOGIES
INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DO PORTO

WWW.CPLOT.ISEP.IPP.PT

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License.

You may obtain a copy of the License at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

ISBN 978-989-35087-6-3

Conteúdo

1	Gestão de Inventários	1
1.1	Introdução	1
1.2	Custos na gestão de inventários	1
1.3	Classificação dos modelos de gestão de inventário	4
1.4	Modelos Determinísticos com taxa de procura constante	6
1.4.1	Modelos com reabastecimento progressivo, rotura permitida com procura cativa	7
1.4.2	Reaprovisionamento progressivo e rotura não permitida	12
1.4.3	Reaprovisionamento Instantâneo e rotura permitida com procura cativa	13
1.4.4	Reaprovisionamento instantâneo e rotura não permitida	14
1.4.5	Descontos de quantidade	16
1.4.6	Sobreposição de encomendas	20
1.4.7	Reaprovisionamento agregado	23
	Referências.....	32
2	Métodos de previsão na gestão de inventários	33
2.1	Introdução	33
2.2	As componentes de uma série temporal.....	34
2.3	Parametrização e seleção de modelos de previsão para séries temporais	37
2.3.1	Análise de autocorrelação	37
2.3.2	Estacionaridade	41
2.3.3	Métricas	48
2.3.4	Parametrização e seleção de modelos	52
2.3.5	Controlo do modelo.....	53
2.4	Tratamento de anomalias nos dados.....	55
2.4.1	Deteção de outliers	56
2.5	Padrões de comparação de desempenho (<i>benchmark</i>).....	57
2.6	Métodos de amortecimento	61
2.6.1	Amortecimento exponencial duplo (Método de Holt) ..	68

2.6.2	Amortecimento Exponencial Triplo (Método de Holt-Winters)	71
2.7	Sobre a utilização do Solver do Excel	76
2.8	A procura intermitente	77
2.8.1	Método de Croston	77
2.8.2	Variantes do método de Croston	80
2.8.3	A classificação dos padrões de procura irregulares	81
	Referências	84
A	Tabelas	87
A.1	Valores críticos para o teste de Dickey-Fuller	87

Capítulo 1

Gestão de Inventários

1.1 Introdução

Os inventários são bens (e.g. matérias-primas, em-curso de fabrico, componentes, produtos acabados, materiais de embalagem) que se encontram na posse de uma empresa, localizados num ponto da cadeia de abastecimento à espera de uma utilização posterior (e.g. serem processados, transportados). Os motivos para a sua existência são de diferentes naturezas, e incluem a necessidade de sincronizar a procura com a oferta, a capacidade de responder à variabilidade da procura dos clientes e dos prazos de entrega, a possibilidade de ligar o sistema de distribuição física ou a oportunidade de tirar partido de flutuações de preço dos artigos entre outros. Gerir o inventário consiste em determinar para cada artigo, quanto e quando encomendar desse artigo. A resposta a estas questões determina o *trade-off* financeiro entre os custos de ter inventário e de não ter inventário. Esta dicotomia entre o ter e não ter inventário tem marcado fortemente os modelos de gestão empresarial, principalmente com o surgimento da filosofia *just-in-time*, associada à indústria automóvel japonesa, e os subsequentes *Toyota Production System* e *Lean Manufacturing* cujo objetivo no que respeita aos inventários, é reduzir, ou mesmo eliminar, nos diferentes estágios de um processo. Apesar de virtuosa na sua essência, a sua generalização para outros setores de atividade pode não ser desejada, pois uma análise holística dos custos (e.g. de produção, transporte, inventários) da cadeia de abastecimento pode determinar que a eliminação de inventários não é a estratégia a seguir.

1.2 Custos na gestão de inventários

A gestão de inventários é na sua essência um problema económico, pelo que os custos da sua gestão desempenham um papel fundamental na determinação

dos parâmetros dos modelos de gestão. Na determinação desses parâmetros, são considerados apenas custos relevantes, i.e., relevantes no sentido que são influenciados pelos parâmetros dos modelos.

Os custos relevantes mais importantes para a determinação de uma política de inventários podem ser classificados em quatro grandes categorias:

- Custos de aquisição
- Custos de encomenda
- Custos de posse
- Custos de rotura

A quantificação desse custos é muitas vezes difícil de ser realizada de uma forma exata, pelo que são necessárias simplificações por forma a poderem ser utilizados nos modelos desenvolvidos. De seguida são feitas algumas considerações sobre os diferentes tipos de custos e as suas componentes.

Custos de aquisição. São os custos diretamente relacionados com o valor pago para adquirir unidades de um artigo. Estes custos podem ser:

- proporcionais à quantidade consumida - quando o custo unitário do artigo é constante e não proporcional à quantidade encomendada;
- dependentes da quantidade encomendada - ocorre em situações de descontos de quantidade, i.e., situações de variações do custo unitário ao longo do tempo relacionadas com ações promocionais de fornecedores ou relacionadas com ciclos de vida dos artigos.

Estes custos podem incluir o:

- custo de compra - valor pago ao fornecedor pela compra de um artigo se as mercadorias são compradas a um fornecedor;
- custo de produção - custo incorrido para a produção de um artigo se este é fabricado pela empresa.

Custos de encomenda. São aqueles que estão relacionados com o processo de aquisição dos artigos. Incluem tipicamente custos fixos (independentes da quantidade encomendada) e custos variáveis (dependentes da quantidade encomendada). Estes podem incluir:

- custos do processo de aquisição (fixo) - correspondem aos custos administrativos dos serviços de compras responsáveis pela gestão de inventários. Inclui, entre outros, os custos de emitir e processar um pedido através dos departamentos de compras e contabilidade, os custos de vigilância dos inventários, os custos de receção, controlo de qualidade, controlo de quantidade ou registo no sistema de gestão;
- custos de transporte - correspondem aos seguros e despacho dos artigos. Quando são da responsabilidade do fornecedor estão frequentemente incluídos no preço dos artigos adquiridos. Caso sejam da responsabilidade

do comprador podem ter uma componente fixa, independente da quantidade encomendada e uma componente variável, tipicamente diretamente proporcional à quantidade encomendada.

Uma vez que grande parte dos custos de encomenda são fixos, é assumido neste capítulo que os custos de encomenda são independentes da quantidade encomendada e que os custos de encomenda variáveis estão incluídos no custo de aquisição.

Custos de posse. Os custos de posse de inventários são incorridos quando os artigos são armazenado ao longo de um período de tempo. Estes incluem:

- custos financeiros
 - custo de oportunidade - representa o retorno do investimento que a empresa teria caso o dinheiro empatado em inventário tivesse sido aplicado num investimento alternativo mais lucrativo. O limite inferior deste custo é geralmente estimado com base numa taxa de juro de crédito bancário;
 - custos de seguros de inventários - representam os prémios de seguros pagos pela empresa, que são calculados normalmente com base no valor médio de inventário.
- custos de armazenagem - representam os custos com a manutenção dos inventários. A sua determinação depende do tipo de operação realizada:
 - operação própria - aqui incluem-se, entre outros, os custos das instalações e dos equipamentos de armazenagem, os salários de pessoal e os custos de energia;
 - operação externalizada - corresponde à taxa paga pelo armazenamento dos artigos em armazéns de terceiros.

Em ambos os casos existem custos fixos e variáveis da quantidade em inventário, sendo que apenas os últimos são relevantes para utilizar nos modelos de gestão de inventários.

- custos de desvalorização - Surgem quando os artigos em inventário perdem parte de seu valor ao longo do tempo. Essa perda pode resultar de:
 - deterioração de artigos - ocorre em resultado de uma permanência excessiva do artigo em armazém. Exemplos são a degradação física dos artigos, ultrapassagem de prazos de validade ou ultrapassagem de garantias de artigos;
 - obsolescência - ocorre quando os artigos perdem valor comercial, mesmo estando em perfeito estado de funcionamento, e.g., quando artigos de vestuário em inventário saem de moda;
 - furto - ocorre em resultado do desaparecimento de artigos.

O valor de um artigo no final de sua vida é geralmente chamado de valor residual.

Custos de rotura. São os custos incorridos quando existe rotura de inventário, i.e., quando um artigo é procurado por um cliente e não está disponível para ser servido de imediato pelo inventário. Os custos de rotura dependem muito do comportamento do cliente e é geralmente muito difícil estimar o seu valor com precisão, pois para além de custos diretos como a margem de lucro ou os custos administrativos, existem custos indiretos como a perda de vendas futuras muito difíceis de quantificar com precisão. Estes custos podem ainda ser classificados de acordo com o comportamento do cliente perante a rotura, pelo que podemos ter as seguintes situações:

- procura cativa - ocorre quando perante uma rotura de inventário, o cliente está disposto a esperar que o artigo esteja disponível;
- procura não-cativa - ocorre quando perante uma rotura de inventário, o cliente desiste da compra do artigo.

1.3 Classificação dos modelos de gestão de inventário

Modelar consiste em representar de uma forma subjetiva, parcial e limitada um sistema real, e é uma das possibilidades de resolver problemas do mundo real. Sempre que não é viável a experimentação para determinar a melhor solução, devido por exemplo aos elevados custos que a experimentação pode ter para a empresa ou por simplesmente não ser possível, construir um modelo para representar o sistema real é uma alternativa viável. O processo de construção do modelo pressupõe uma abstração, i.e., incluir os detalhes que se julgam ser importantes e se descartar aqueles que se consideram como irrelevantes. O modelo construído é sempre menos complexo que o sistema original, e os resultados que apresenta, devem ser apreciados nesse contexto.

A grande diversidade das empresas e das realidades onde estão inseridas, origina uma multiplicidade de problemas de gestão de inventários. A natureza das empresas, a tipologia dos seus artigos e dos seus equipamentos, as cadeias de abastecimento onde estão inseridas ou os comportamentos dos mercados, são apenas alguns exemplos de fatores que condicionam a gestão de inventários e originam uma grande diversidade de modelos.

Os modelos de gestão de inventários podem ser classificados de acordo com vários critérios. Sem ser exaustivo, são apresentados os principais critérios de classificação de modelos de gestão de inventários.

Modelos determinísticos versus estocásticos. Num modelo determinístico, a procura, o preço e o prazo de entrega são assumidos como sendo conhecidos antecipadamente. Num modelo estocástico, alguns dados apresentam incerteza, e a sua caracterização assenta na teoria estatística. Ambos os

modelos podem ainda ser estáveis ou instáveis. São estáveis quando o valor esperado e a variabilidade são constantes e instáveis em caso contrário.

Artigos de procura independente versus procura dependente. Um artigo diz-se de procura independente, quando esta não resulta diretamente da necessidade de um outro artigo. Corresponde à procura externa à empresa. Esta procura é estimada recorrendo normalmente a métodos de previsão, que posteriormente é traduzida em planos de produção e/ou compras. Se se trata de um retalhista/distribuidor, a previsão traduz-se diretamente em planos de compras. Se se trata de um produtor, o plano de produção decidido para os produtos acabados (de procura independente) dá origem às necessidades dos artigos necessários à fabricação (e.g. matérias-primas, matérias subsidiárias, componentes). Deste modo, a procura não resulta das decisões tomadas independentemente pelos clientes, mas sim das decisões tomadas pela empresa para fabricação. Estes artigos dizem-se de procura dependente.

Única versus múltiplas localizações de inventário. Em problemas de inventário de instalação única, os modelos são determinados com uma perspectiva de centralização do inventário num único ponto. Numa otimização de inventário em múltiplas localizações, a abordagem adotada é mais holística cobrindo diferentes pontos da cadeia de abastecimento em simultâneo. As diferentes instalações podem estar no mesmo nível da cadeia de abastecimento ou ter uma relação hierárquica. Problemas de inventários de múltiplas localizações são geralmente muito mais difíceis de tratar.

Número de artigos. Os modelos de artigo único normalmente pressupõe que não existem restrições de capital, espaço ou de colocação de encomendas. Ao gerir um inventário multi-artigo, os recursos e as restrições são partilhados entre todos os artigos e é necessário encontrar critérios de repartição entre os artigos. A maioria dos problemas de gestão de inventários multi-artigo é particularmente difícil.

Reaprovisionamento instantâneo versus reaprovisionamento progressivo. O reaprovisionamento instantâneo está relacionada com o isolamento face aos restantes elementos da cadeia de abastecimento. Desta forma o objetivo é determinar a data e a quantidade necessária para responder à procura, considerando-se que o ponto de inventário é reabastecido quase instantaneamente (por exemplo, como consequência de uma entrega de um contentor). Quando fornecedores e clientes não estão isolados, como no casos em que a produção e retalho estão integrados, o reaprovisionamento pode ser realizado progressivamente, i.e., o reaprovisionamento ocorre em simultâneo com o consumo.

1.4 Modelos Determinísticos com taxa de procura constante

Na primeira parte deste subcapítulo são apresentados os pressupostos subjacentes e a notação utilizada nos modelos desenvolvidos, seguida de descrição, ilustração e respetiva modelação de um cenário de inventário onde o reabastecimento é progressivo e é permitida rotura com procura cativa. A partir do modelo desenvolvido são posteriormente alteradas restrições de reabastecimento e de rotura e os respetivos modelos são apresentados.

Os pressupostos que estão na base dos modelos desenvolvidos são:

- A procura é determinística e constante.
- O horizonte de planeamento é muito longo, i.e., assume-se que o processo continua indefinidamente e que os valores dos parâmetros não se alteram.
- A quantidade encomendada não necessita ser um número inteiro.
- Os fatores de custo não variam significativamente ao longo do tempo, i.e., considera-se uma taxa de inflação nula.
- O artigo é tratado de forma independente face aos restantes artigos, i.e., a procura é considerada independente.
- Não existem restrições mínimas ou máximas à quantidade a encomendar (e.g., capacidade do fornecedor, capacidade de armazenagem).
- Considera-se um único ponto de inventário.
- O custo unitário do artigo não varia com o tempo nem depende da quantidade encomendada (i.e., não existem descontos de quantidade).
- Benefícios por gestão conjunta de artigos não são considerados.

A tabela 1.1 resume a notação utilizada neste capítulo. A notação utilizada em aspetos específicos dos modelos não está incluída na tabela.

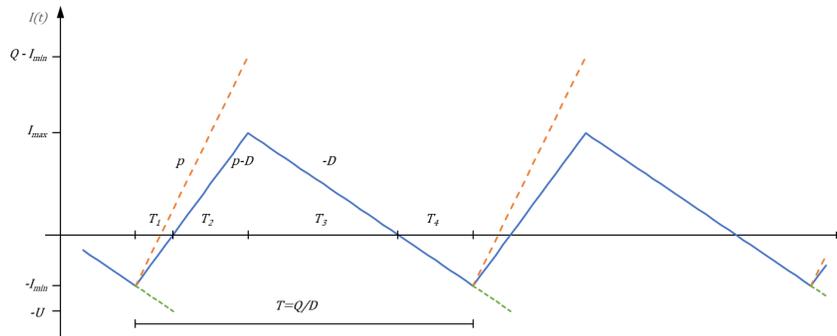


Figura 1.1 Evolução do nível de inventário

Tabela 1.1 Notação

Q	- Quantidade a encomendar por encomenda [unidade de artigo]
T	- Intervalo de tempo entre duas encomendas consecutivas [unidade de tempo]
A	- Custo de encomenda [€]
D	- Taxa de procura [unidade de artigo / unidade de tempo]
c	- Custo unitário do artigo [€ / unidade de artigo]
r	- Taxa de Posse [% / unidade de tempo]
H	- Custo de posse unitário ($H = rc$) [€/(unidade de artigo \times unidade de tempo)]
u	- Custo fixo por rotura [€/unidade de artigo]
v	- Custo variável por rotura e tempo [€/(unidade de artigo \times unidade de tempo)]
p	- Taxa de reaprovisionamento [unidade de artigo / unidade de tempo]
T_p	- Período de reaprovisionamento [unidade de tempo]
L	- <i>Lead time</i> , ou seja, o tempo decorrido entre o momento em que a encomenda é colocada e o momento em que os artigos são recebidos [unidade de tempo]
K_T	- Custo Total por unidade de tempo [€/unidade de tempo]
K_{TR}	- Custo Total Relevante por unidade de tempo [€/unidade de tempo]

1.4.1 Modelos com reabastecimento progressivo, rotura permitida com procura cativa

A Figura 1.1 ilustra a evolução do nível de inventário $I(t)$ de um artigo ao longo de um período de tempo t , considerando os pressupostos definidos e uma procura cativa, i.e., no caso de ocorrer rotura, as encomendas não são perdidas e são satisfeitas assim que o inventário for reposto. O nível de inventário varia entre $-I_{mim}$ e I_{max} . Um valor negativo do nível de inventário, corresponde a pedidos pendentes no instante t , e é comumente designado na terminologia anglo-saxônica como *backorder*. O número máximo de unidades em *backorder* B é igual a I_{mim} . Um valor positivo indica o número de unidades que permitem satisfazer a procura imediatamente a partir do inventário, i.e., o inventário-em-mão. O valor máximo do inventário-em-mão M é igual a I_{max} . Os artigos são consumidos a uma taxa D , determinística e constante. A quantidade encomendada Q é repostada a intervalos de tempo T . O reaprovisionamento decorre de forma progressiva a uma taxa p durante o período $T_p \geq 0$, durante o qual simultaneamente ocorre consumo. A quantidade líquida do artigo em inventário por unidade de tempo durante T_p é $(p - D)$ e a quantidade recebida durante T_p corresponde a

$$Q = p \cdot T_p \quad (1.1)$$

As linhas a traço interrompido de cor laranja na Figura 1.1 representam o número cumulativo de unidades que chegam ao ponto de inventário durante um reabastecimento (o declive é p). Após a conclusão do reabastecimento, o nível de inventário diminui a uma taxa igual a $-D$.

No período de tempo T_B durante o qual existem pedidos pendentes, a procura total de unidades por ciclo corresponde a

$$U = D \cdot T_B \quad (1.2)$$

O ciclo de reaprovisionamento encontra-se dividido em quatro períodos, T_1 , T_2 , T_3 e T_4 representando o tempo que o nível de inventário leva para ir de $-I_{mim}$ a 0, de 0 a I_{max} , de I_{max} a 0 e de 0 a $-I_{mim}$, respetivamente. Os períodos de tempo T_1 , T_2 , T_3 e T_4 são dados por

$$T_1 = \frac{B}{p - D} \quad (1.3)$$

$$T_2 = \frac{M}{p - D} \quad (1.4)$$

$$T_3 = \frac{M}{D} \quad (1.5)$$

$$T_4 = \frac{B}{D} \quad (1.6)$$

O nível máximo de inventário-em-mão M por pode ser determinado considerando as equações (1.1) e

$$T_p = T_1 + T_2 = \frac{B + M}{p - D}$$

resultando

$$M = Q \cdot (1 - D/p) - B \quad (1.7)$$

O procura total de unidades por ciclo U pode ser determinado considerando as equações (1.2) e

$$T_B = T_1 + T_4 = \frac{p \cdot B}{(p - D) \cdot D}$$

resultando

$$U = \frac{p}{p - D} \cdot B \quad (1.8)$$

Para se definir a política de gestão de inventários é necessário determinar a quantidade a encomendar Q , o intervalo de tempo entre encomendas T e o máximo de pedidos pendentes B . Considerando que os valores dos parâmetros envolvidos não mudam ao longo do tempo, as duas variáveis D e T reduzem-se a uma só, e têm a seguinte relação

$$Q = D \cdot T \quad (1.9)$$

O problema consiste então em determinar o valor de Q (ou, equivalentemente, T) e de B de forma a que o custo total por unidade de tempo K_T seja mínimo.

A metodologia seguida na determinação dos modelos começa por modelar os custos por ciclo, seguindo-se o custo por unidade de tempo e finalmente o valor das variáveis de decisão. Dado que o intervalo de reaprovisionamento T é neste caso constante e o nível de inventário varia de uma forma cíclica, os diferentes custos por ciclo são dados por:

- Custos de aquisição - Uma vez que o custo unitário do artigo é constante, o custo de aquisição é dado por

$$K'_D = c \cdot Q$$

- Custos de encomenda - Sendo um custo fixo por ciclo fica

$$K'_A = A$$

- Custos de posse - Corresponde ao custo de ter um número médio de unidades de inventário (\bar{I}) durante o ciclo.

$$K'_H = H \cdot \bar{I} \cdot T$$

- Custos de rotura - Compreendem os custos fixos de rotura e os custos variáveis de rotura. Os primeiros dependem da política de alocação de inventário dos pedidos pendentes. Se a política é *last come-first served* (LCFS), i.e., a procura mais recente é a primeira a ser satisfeita, os custos fixos de rotura por ciclo são determinados por

$$K'_{Uf}^{(LCFS)} = u \cdot B \quad (1.10)$$

Se se trata de uma política *first come-first served* (FCFS), i.e., a procura é satisfeita por ordem de chegada, os custos fixos de rotura por ciclo são determinados por

$$K'_{Uf}^{(FCFS)} = u \cdot U \quad (1.11)$$

Uma vez que as variáveis de decisão no modelo são Q e B , substituindo (1.8) em (1.11) fica

$$K'_{Uf}^{(FCFS)} = \frac{p}{p-D} \cdot u \cdot B \quad (1.12)$$

o que é equivalente a (1.10) multiplicada pelo factor $p/(p-D)$.

Os custos de rotura variáveis por ciclo são dependentes do nível médio de pedidos pendentes \bar{B} .

$$K'_{Uv} = v \cdot \bar{B} \cdot T$$

O custo total de rotura por ciclo é dado por

$$K'_U = u' \cdot B + v \cdot \bar{B} \cdot T$$

em que para a politica LCFS, $u' = u$ e para a politica FCFS, $u' = p/(p - D) \cdot u$.

O custo total por unidade de tempo $K_T(Q, B)$ é dado por

$$K_T(Q, B) = \frac{1}{T} \cdot (c \cdot Q + A + H \cdot \bar{I} \cdot T + u' \cdot B + v \cdot \bar{B} \cdot T) \quad (1.13)$$

O nível médio de inventário-em-mão é dado por

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I_+(t) dt = \frac{1}{T} \left(\frac{M \cdot (T_2 + T_3)}{2} \right) \quad (1.14)$$

em que

$$I_+(t) = \begin{cases} I(t) & \text{se } I(t) \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O nível médio de pedidos pendentes é dado por

$$\bar{B} = \frac{1}{T} \int_0^T I_-(t) dt = \frac{1}{T} \left(\frac{B \cdot (T_1 + T_4)}{2} \right) \quad (1.15)$$

em que

$$I_-(t) = \begin{cases} -I(t) & \text{se } I(t) \leq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Substituindo em (1.14), T_2 e T_3 a partir de (1.4) e (1.5) e T a partir de (1.9) fica

$$\bar{I} = \frac{M^2}{2 \cdot Q \cdot (1 - D/p)} = \frac{[Q \cdot (1 - D/p) - B]^2}{2 \cdot Q \cdot (1 - D/p)} \quad (1.16)$$

e substituindo em (1.15), T_1 e T_4 a partir de (1.3) e (1.6) fica

$$\bar{B} = \frac{B^2}{2 \cdot Q \cdot (1 - D/p)} \quad (1.17)$$

Finalmente a partir de (1.16) e (1.17) e considerando (1.9) podemos escrever (1.13) da seguinte forma

$$K_T(Q, B) = c \cdot D + A \cdot \frac{D}{Q} + \frac{H \cdot [Q \cdot (1 - D/p) - B]^2}{2 \cdot Q \cdot (1 - D/p)} + u' \cdot B \cdot \frac{D}{Q} + \frac{v \cdot B^2}{2 \cdot Q \cdot (1 - D/p)} \quad (1.18)$$

O quantidade ótima de encomenda Q^* e a quantidade ótima de pedidos pendentes B^* são obtidas aplicando derivadas parciais a $K_T(Q, B)$ igualando a zero e resolvendo o sistema de equações.

$$\frac{\partial K_T(Q, B)}{\partial Q} = 0$$

$$\frac{\partial K_T(Q, B)}{\partial B} = 0$$

Os resultados obtidos são

$$Q^* = \sqrt{\frac{H+v}{v}} \sqrt{\frac{2 \cdot A \cdot D}{H \cdot (1 - D/p)} - \frac{(u' \cdot D)^2}{H \cdot (H+v)}} \quad (1.19)$$

$$B^* = \frac{(H \cdot Q^* - u' \cdot D)(1 - D/P)}{H + v} \quad (1.20)$$

A partir dos valores obtidos de Q^* e B^* é também possível calcular um conjunto de quantidades relacionadas com o modelo de inventário. Destas destacam-se as seguintes:

- Taxa de pedidos pendentes (*Backorders*) (τ) - corresponde a proporção da procura que não é satisfeita diretamente a partir do inventário existente. Para uma política LCFS corresponde a

$$\tau = \frac{B}{Q} \quad (1.21)$$

Para uma política FCFS é determinada por

$$\tau = \frac{U}{Q} \quad (1.22)$$

Substituindo (1.8) em (1.22) obtém-se

$$\tau = \frac{B}{Q} \cdot \frac{p}{(p - D)} \quad (1.23)$$

- Ponto de encomenda (s) - corresponde ao nível de inventário que sinaliza que deve ser feita uma ordem para reabastecimento. É o nível de inventário para o período de tempo L que antecede o valor mínimo de inventário.

$$s = -B + D \cdot L = -\tau \cdot Q \cdot \frac{(p - D)}{p} + D \cdot L \quad \forall L < T - T_p \quad (1.24)$$

Exemplo numérico _____

Consideremos um artigo com as seguintes características:

Consumo anual a taxa constante	$D = 1200 \text{ kg/ano}$
Custo unitário de aquisição	$c = 20 \text{ €/kg}$
Custo de encomenda (fixo)	$A = 800 \text{ €}$
Taxa de posse	$r = 2 \text{ \%/mês}$
Taxa de reaprovisionamento	$p = 200 \text{ kg/mês}$
Custo variável de rotura	$v = 2 \text{ €/kg.mês}$

O seu custo de posse é

$$H = 0,02 \times 20 = 0,4 \text{ €/kg.mês}$$

Considerando que a procura mensal é 100 kg/mês , a quantidade ótima de encomenda é determinada a partir de (1.19)

$$Q^* = \sqrt{\frac{0,4 + 2}{2}} \sqrt{\frac{2 \times 800 \times 100}{0,4 \times (1 - 100/200)}} = 979,80 \text{ kg}$$

a penúria máxima é calculada a partir de (1.20)

$$B^* = \frac{(0,4 \times 979,80) \times (1 - 100/200)}{0,4 + 2} = 81,65 \text{ kg}$$

o nível máximo de inventário a partir de (1.7)

$$M = 979,80 \times (1 - 100/200) - 81,65 = 408,25 \text{ kg}$$

e a taxa de penúria a partir de (1.23)

$$\tau = \frac{81,65}{979,80} \times \frac{200}{(200 - 100)} = 16,75 \%$$

1.4.2 Reaprovisionamento progressivo e rotura não permitida

A Figura 1.2 ilustra uma situação de inventário com reaprovisionamento progressivo e onde a rotura não é permitida. Uma vez que não pode existir penúria ($B = 0$) a equação da quantidade ótima de encomenda é obtida pelo cálculo da derivada de $K_T(Q, B)$ em ordem a Q e igualada a zero.

Da simplificação de 1.18 resulta

$$K_T(Q) = c \cdot D + A \cdot \frac{D}{Q} + \frac{Q}{2} \cdot H \cdot (1 - D/p) \quad (1.25)$$

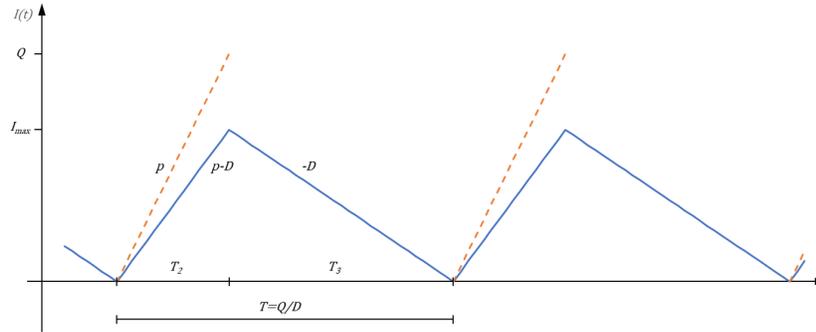


Figura 1.2 Evolução do nível de inventário

cuja derivada igualada a zero

$$\frac{\partial K_T(Q)}{\partial Q} = 0$$

resulta na seguinte quantidade ótima de encomenda

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot A \cdot D}{H \cdot (1 - D/p)}} \quad (1.26)$$

O ponto de encomenda é dado por

$$s = D \cdot L \quad \forall L < T_3 \quad (1.27)$$

1.4.3 Reaprovisionamento Instantâneo e rotura permitida com procura cativa

Uma situação de inventário com reaprovisionamento instantâneo e rotura permitida com procura cativa é ilustrada na Figura 1.3.

Considerando que $p \rightarrow \infty$, os custos fixos de rotura deixam de depender da política de alocação de inventário de pedidos pendentes. A equação 1.18 é simplificada e é dada por

$$K_T(Q, B) = c \cdot D + A \cdot \frac{D}{Q} + \frac{H \cdot [Q - B]^2}{2 \cdot Q} + u \cdot B \cdot \frac{D}{Q} + \frac{v \cdot B^2}{2 \cdot Q} \quad (1.28)$$

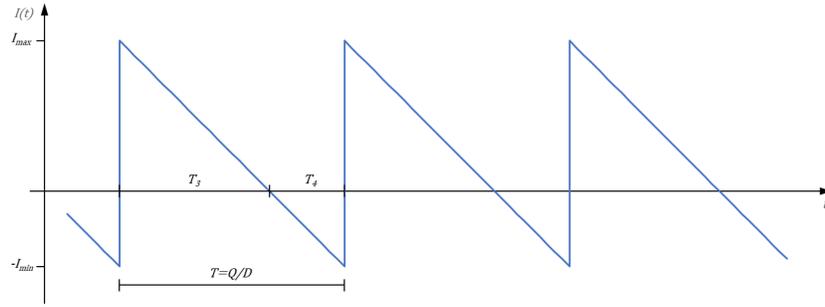


Figura 1.3 Evolução do nível de inventário

As soluções do sistema de equações das derivadas parciais de $K_T(Q, B)$ em ordem a Q e B , igualadas a zero, resultam na quantidade ótima de encomenda Q^* e na quantidade ótima de penúria B^* e são obtidas por

$$Q^* = \sqrt{\frac{H+v}{v}} \sqrt{\frac{2 \cdot A \cdot D}{H} - \frac{(u \cdot D)^2}{H \cdot (H+v)}} \quad (1.29)$$

e

$$B^* = \frac{(H \cdot Q^* - u \cdot D)}{H+v} \quad (1.30)$$

A taxa de penúria obtém-se a partir de

$$\tau = \frac{B}{Q} \quad (1.31)$$

e o ponto de encomenda a partir de

$$s = -\tau \cdot Q + D \cdot L \quad \forall L < T \quad (1.32)$$

1.4.4 Reaprovisionamento instantâneo e rotura não permitida

Na Figura 1.4 está ilustrada uma situação de inventário com reaprovisionamento instantâneo e onde a rotura não é permitida. Neste cenário $B = 0$ e $p \rightarrow \infty$.

A equação da quantidade ótima de encomenda é obtida pelo cálculo da derivada de $K_T(Q, B)$ em ordem a Q e igualada a zero. Da simplificação de 1.18 resulta

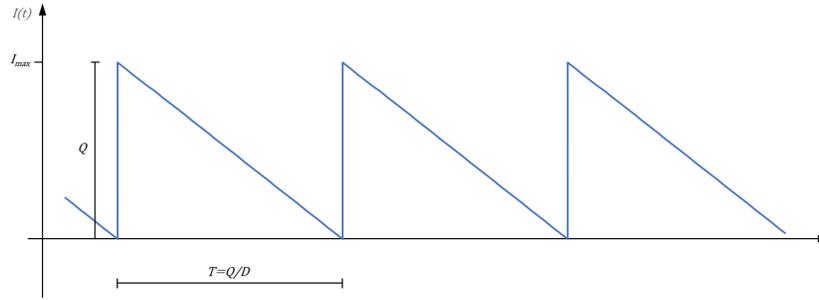


Figura 1.4 Evolução do nível de inventário

$$K_T(Q) = K_D + K_A + K_H$$

$$K_T(Q) = c \cdot D + A \cdot \frac{D}{Q} + \frac{Q}{2} \cdot H \quad (1.33)$$

A quantidade ótima de encomenda é dada por

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot A \cdot D}{H}} \quad (1.34)$$

e o ponto de encomenda é dado por

$$s = D \cdot L \quad \forall L < T \quad (1.35)$$

A equação 1.34 é designada por quantidade económica e encomenda (QEE) e é o resultado de um dos primeiros trabalhos sobre gestão de inventários. Introduzida por Harris, 1913, a sua robustez e simplicidade faz com que seja frequentemente utilizado para ilustrar a variação dos diferentes tipos de custos em função da quantidade encomendada por ciclo.

A Figura 1.5 ilustra as três componentes de custo de (1.4.4). É possível verificar que os custos associados à encomenda (K_A) decrescem de uma forma não linear com o aumento de Q e os custos de posse (K_H) crescem linearmente com Q . Os custos de aquisição (K_D) são independentes de Q e como tal não são relevantes para a determinação de Q^* . A função do custo total toma a forma convexa, onde o mínimo se encontra onde os custos de posse se igualam aos custos de encomenda.

Uma vez que os custos de aquisição não contribuem para a determinação de Q^* quando o custo unitário não varia, é frequente apenas se considerarem os custos relevantes nos modelos de gestão de inventários.

Os custos relevantes da expressão 1.4.4 são

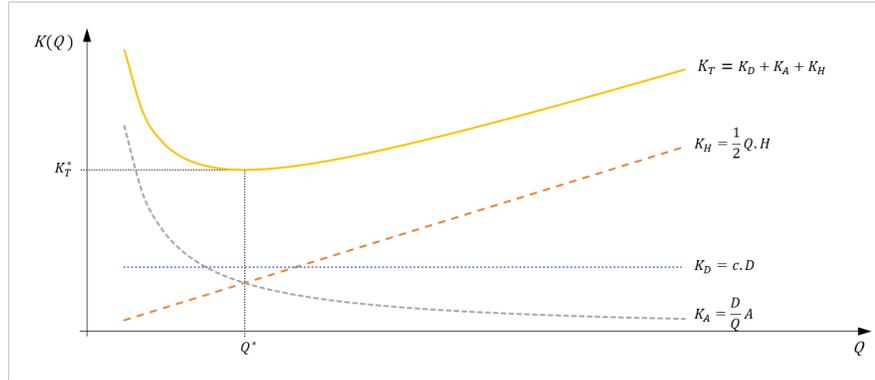


Figura 1.5 Custos em função da quantidade encomendada

$$K_{TR}(Q) = A \cdot \frac{D}{Q} + \frac{Q}{2} \cdot H \quad (1.36)$$

1.4.5 Descontos de quantidade

Um dos pressupostos mais restritivos para a determinação de Q^* considerado nos modelos previamente apresentados, é o custo unitário de aquisição do artigo não depender da quantidade encomendada. Verifica-se no entanto na prática, com frequência, a existência de situações de descontos de quantidade, i.e., situações em que o custo unitário do artigo depende da quantidade encomendada. Estas situações podem resultar de descontos no custo unitário ou nos custos de transporte oferecidos pelos fornecedores em função da quantidade adquirida ou resultar de economias de escala nos processos produtivos. As estruturas de custo associadas aos descontos de quantidade são muito variadas, e.g., os descontos podem ser integrais, i.e., abranger a totalidade da quantidade adquirida ou serem incrementais. Neste subcapítulo apenas nos focaremos no caso de descontos integrais.

Neste caso, a restrição de independência do custo de aquisição é substituída por outra que considera o custo unitário de aquisição c_i dependente da quantidade encomendada, como ilustrado na Figura 1.6, tal que

$$c = c_i \quad Q_{i-1} \leq Q < Q_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

com

$$c_i > c_{i+1},$$

em que Q_i representa uma quantidade limite de aplicação de um custo unitário. Podemos observar que para um custo unitário menor, o custo de aquisição para uma mesma quantidade Q será sempre menor, mas para quantidades diferentes com $Q < Q'$ pode ocorrer que $K_D(Q') > K_D(Q)$, dependendo do valor de c_i aplicado.

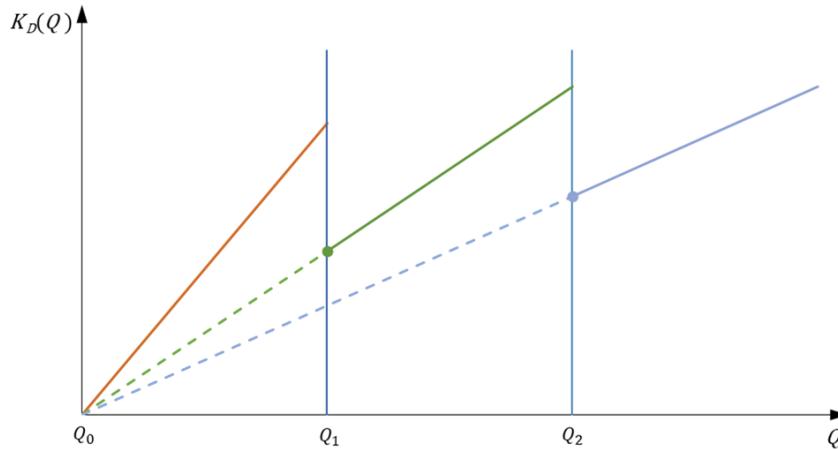


Figura 1.6 Custo de aquisição em função da quantidade encomendada

O mesmo se pode verificar quando se consideram os custos totais. No exemplo da Figura 1.7, que ilustra o valor dos custos totais em função da quantidade encomendada por ciclo, podem ser observadas essas mesmas relações. Nestes cenários a decisão de aceitar ou não um desconto no custo unitário, resulta do trade-off entre a redução dos custos de aquisição e os custos com as encomendas ou com a posse de inventário.

A determinação da quantidade ótima em cada intervalo (Q_i^*) resulta da combinação da quantidade ótima da curva (Q'_i) com os limites do intervalo.

Tendo em conta as considerações, um algoritmo eficiente para determinar a quantidade ótima de encomenda Q^* é apresentado em Algoritmo 1. O algoritmo avalia iterativamente a partir do custo unitário menor, se em cada

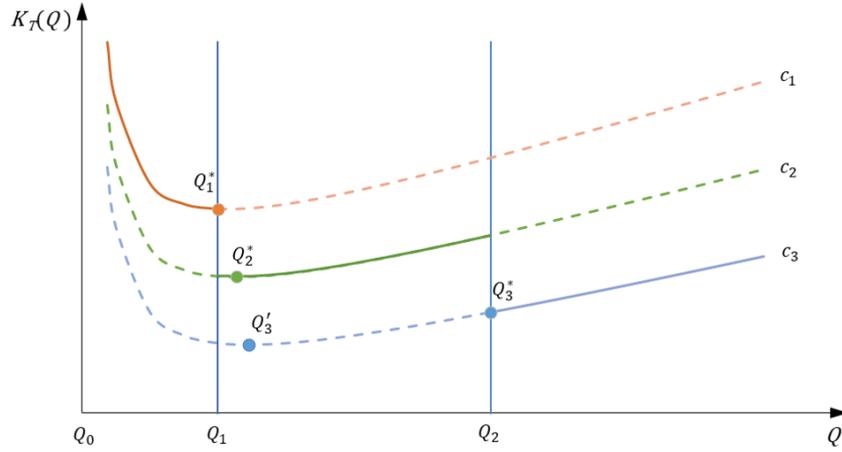


Figura 1.7 Quantidades ótimas para cada custo c_i

intervalo de aplicação de um custo unitário, o seu ótimo corresponde ao ótimo global.

Algorithm 1: Quantidade ótima com descontos de quantidade

início

Selecionar o escalão i com o c_i de menor valor;

Determinar para c_i o valor de Q'_i que representa a quantidade ótima da curva.;

Atribuir ao melhor escalão b o valor de i ($b = i$);

se $Q'_i \geq Q_{i-1}$ **então**

 Se Q'_i se encontra no escalão de aplicação do custo unitário;

 Calcular o custo total $K_T(Q'_i, c_i)$;

 Terminar

senão

 Atribuir à quantidade económica do escalão Q_i^* a quantidade limite do escalão com menor custo total, i.e., $Q_i^* = Q_{i-1}$;

 Calcular o custo total $K_T(Q_i^*, c_i)$;

repetir

 Selecionar o escalão seguinte $i = i - 1$;

 Determinar o valor de Q'_i ;

se $Q_{i-1} \leq Q'_i < Q_i$ **então**

$Q_i^* = Q'_i$;

 Calcular $K_T(Q_i^*, c_i)$;

se $K_T(Q_i^*, c_i) < K_T(Q_b^*, c_b)$ **então**

$Q^* = Q'_i$;

$b = i$;

 break;

senão continue;

se $Q'_i < Q_{i-1}$ **então**

$Q_i^* = Q_{i-1}$

senão $Q_i^* = Q_i$;

 Calcular o valor de $K_T(Q_i^*, c_i)$;

se $K_T(Q_i^*, c_i) < K_T(Q_b^*, c_b)$ **então**

$b = i$;

até não haver mais escalões;

$Q^* = Q_b^*$;

$K_T(Q^*) = K_T(Q_b^*, c_b)$;

Exemplo numérico

Uma empresa de distribuição compra açúcar a uma taxa constante de 4.200 kg/mês. O custo de processamento de uma encomenda é de 80 € e os custos de posse da empresa são:

- $w = 0,20$ €/unidade.ano, sendo w o custo de armazenagem
- $i = 10\%$ /ano, sendo i a taxa de imobilização de capital

O fornecedor de açúcar da empresa oferece a seguinte estrutura de descontos do preço unitário sobre todas as unidades:

Escalão	Custo Unitário	Quantidade encomendada
i	€/kg	kg
1	0,40	$0 \leq Q < 10.000$
2	0,36	$10.000 \leq Q < 20.000$
3	0,35	$Q \geq 20.000$

Estamos perante um caso com três escalões ($i = 1, 2, 3$), com $c_1 = 0,40$ €/kg, $c_2 = 0,36$ €/kg, $c_3 = 0,35$ €/kg, $Q_1 = 10.000$ kg e $Q_2 = 20.000$ kg.

1º Passo - Selecionar $i = 3$, atribuir $b = 3$ e determinar Q'_3

Tratando-se de um modelo de reaprovisionamento instantâneo e penúria não permitida, Q'_3 é determinada utilizando (1.34).

$$Q'_3 = \sqrt{\frac{2 \times 80 \times (4200 \times 12)}{0,35 \times 0,1 + 0,2}} = 5857,9 \text{ kg}$$

dado que $Q'_3 < Q_2$ então $Q_3^* = Q_2 = 20000$

2º Passo - Calcular $K(Q_3^*, c_3)$

$$K(20.000; 0,35) = 0,35 \times (4200 \times 12) + 80 \times \frac{4200 \times 12}{20.000} + \frac{20.000}{2} \times (0,35 \times 0,1 + 0,2) =$$

$$= 20191,6 \text{ €/ano}$$

3º Passo - Selecionar $i = 2$ e determinar Q'_2

$$Q'_2 = \sqrt{\frac{2 \times 80 \times (4200 \times 12)}{0,36 \times 0,1 + 0,2}} = 5845,5 \text{ kg}$$

dado que $Q'_2 \leq Q_1$ então $Q_2^* = Q_1$

4º Passo - Calcular $K(Q_2^*, c_2)$

$$K(10.000; 0,36) = 0,36 \times (4200 \times 12) + 80 \times \frac{4200 \times 12}{10.000} + \frac{10.000}{2} \times (0,36 \times 0,1 + 0,2) =$$

$$= 19727,2 \text{ €/ano}$$

5º Passo - Atualizar b

Dado que $K(Q_2^*, c_2) < K(Q_b^*, c_b)$ então $b = 2$

6º Passo - Selecionar $i = 1$ e determinar Q_1'

$$Q_1' = \sqrt{\frac{2 \times 80 \times (4200 \times 12)}{0,40 \times 0,1 + 0,2}} = 5796,6 \text{ kg}$$

dado que $Q_1' < Q_1$ então $Q_1^* = Q_1'$

7º Passo - Calcular $K(Q_1^*, c_1)$

$$K(5796,6; 0,40) = 0,40 \times (4200 \times 12) + 80 \times \frac{4200 \times 12}{5796,6} + \frac{5796,6}{2} \times (0,40 \times 0,1 + 0,2) =$$

$$= 21551,2 \text{ €/ano}$$

8º Passo - Atualizar b

Dado que $K(Q_1^*, c_1) > K(Q_b^*, c_b)$ não se altera b

Q^* é então igual a Q_2^* , i.e., $Q^* = 10.000 \text{ kg}$

1.4.6 Sobreposição de encomendas

Uma grande parte dos sistemas de gestão de inventários que encontramos no mundo real, apresentam um prazo de entrega L maior do que o ciclo de aprovisionamento T , nos modelos de reposição instantânea, ou maiores do que o período do ciclo onde apenas se verifica consumo nos modelos de reposição progressiva.

Isto significa que quando se lança uma nova encomenda, têm que ser consideradas simultaneamente, a quantidade de inventário existente em armazém e as encomendas de reposição pendentes.

Nestes casos é importante caracterizar os inventários da seguinte forma:

- Inventário-em-mão - corresponde ao inventário físico disponível em armazém. Este nunca toma valores negativos.
- Inventário líquido - corresponde ao inventário-em-mão menos o inventário que se encontra cativo em resultado da ocorrência de rotura. Quando o seu valor é positivo coincide com o do inventário-em-mão.

$$(\text{Inventário líquido}) = (\text{Inventário-em-mão}) - (\text{Inventário cativo})$$

- Inventário nominal - Corresponde ao valor total de inventário disponível, i.e., ao inventário líquido adicionado das quantidades encomendadas pendentes.

$$(\text{Inventário nominal}) = (\text{Quantidades encomendadas}) + (\text{Inventário-em-mão}) - (\text{Inventário cativo})$$

Se o prazo de entrega for zero, o inventário nominal coincide com o inventário líquido.

Para ilustrar a sobreposição de encomendas recorreremos à Figura 1.8, que ilustra um caso em que o reaprovisionamento é instantâneo, a rotura não é permitida, e o prazo de entrega é superior ao ciclo de reaprovisionamento.

Como se pode verificar o inventário-em-mão evolui entre zero e o valor da quantidade encomendada $Q = Q_0 = Q_1 = Q_2 = Q_3$. A duração de cada uma das encomendas realizadas, está representada por um segmento na parte inferior da figura. Como é possível constatar, quanto a encomenda E_2 é lançada, a encomenda E_1 ainda está pendente de entrega, pelo que esta deve ser considerada ao fazer a encomenda E_2 .

Um outro valor representado na Figura 1.8 é o ponto de encomenda s , obtido através da expressão $s = DL$. É possível também constatar que sempre que o inventário nominal atinge o ponto de encomenda, verifica-se o lançamento de uma encomenda, com o correspondente aumento do inventário nominal de Q .

No exemplo considerado, podemos verificar que o número de encomendas pendentes varia entre 1 e 2. É possível generalizar que o número de encomendas pendentes varia entre m e $m + 1$. O valor de m é obtido através de

$$m = \left\lfloor \frac{L}{T} \right\rfloor$$

O valor de m também traduz o número de ciclos incluídos no prazo de entrega L .

Se pretendermos determinar o ponto de encomenda para o inventário-em-mão, nos casos de reabastecimentos instantâneos e rotura não permitida, este é dado por

$$s' = (L - m \cdot T) \cdot D$$

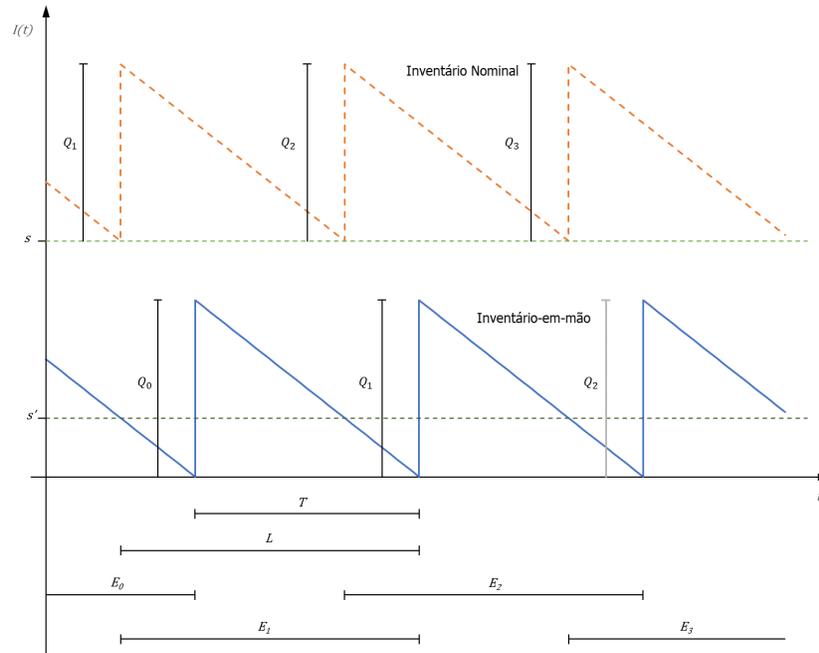


Figura 1.8 Sobreposição de encomendas

e nos casos de reabastecimentos instantâneos e rotura permitida com procura cativa, este é dado por

$$s' = (L - m \cdot T) \cdot D - B$$

Quando $L < T$ então $m = 0$ pelo que $s = s'$.

1.4.7 *Reaprovisionamento agregado*

No mundo real, a grande maioria dos sistemas de gestão de inventários que encontramos não são de artigo único, mas de múltiplos artigos. A utilização de modelos de artigo único só é aceitável se não existirem interações entre os diferentes artigos em inventários. As interações entre os artigos podem ser de diferente natureza, como os seguintes exemplos:

- os artigos podem ser substitutos uns dos outros
- os artigos podem partilhar o mesmo fornecedor/produção
- a capacidade de armazenagem ser limitada
- existir um limite para o número de encomendas a realizar
- existir um limite financeiro para investir em inventários.

Estas interações dão origem tipicamente a dois tipos de problemas, os que resultam de restrições ou os que resultam de partilha de custos.

Os primeiros derivam da existência de restrições (e.g. de espaço, financeiros) que limitam a quantidade a encomendar de cada artigo.

Os segundos referem-se a casos em que a agregação de encomendas de artigos pode conduzir a:

- uma redução dos custos unitário de aquisição - quando um conjunto de artigos é encomendado a um mesmo fornecedor, este pode oferecer uma redução dos custos de aquisição se a encomenda atingir um determinado valor;
- uma redução dos custos de transporte - em particular no comércio internacional, é muitas vezes vantajoso agrupar encomendas de vários artigos de forma a utilizar a capacidade total do transporte contratado (e.g. contentor, semi-reboque);
- facilidade de planeamento - na perspetiva do comprador, a gestão torna-se mais fácil se se gerir o inventário tendo como base o fornecedor em vez dos artigos.

Apesar dos benefícios que podem decorrer da agregação de encomendas de artigos, esta pode resultar:

- no aumento dos níveis médios de inventário, em resultado de encomendas de dimensão superior ao ótimo de cada artigo;
- no aumento dos custos de gestão de inventários, pois é mais complexo gerir artigos agregados do que individualmente;
- em perda de flexibilidade para responder a situações excecionais de um único artigo.

Nos subcapítulos seguintes é apresentado um caso de restrição de capacidade e um caso de custos partilhados.

1.4.7.1 Restrições de capacidade

O problema apresentado consiste na determinação das quantidades de encomenda que minimizam os custos totais de aprovisionamento de um conjunto de artigos com reaprovisionamento instantâneo, penúria não é permitida e que partilham o mesmo espaço de armazenagem. Seja n o número de artigos i , ($i = 1, \dots, n$) a encomendar em simultâneo, de forma a que a soma da área que estes ocupam no armazém não ultrapasse a capacidade E do mesmo. Cada unidade do artigo i ocupa uma área e_i . Seja D_i a taxa de procura constante, A_i o custo de lançamento de encomenda, c_i o custo unitário, H_i o custo de posse unitário do artigo i .

Nestas condições o custo total por unidade de tempo é dado por

$$K_T(Q) = \sum_{i=1}^n \left(c_i \cdot D_i + A_i \cdot \frac{D_i}{Q_i} + \frac{Q_i}{2} \cdot H_i \right) \quad (1.37)$$

e deve ser minimizado respeitando a seguinte restrição

$$\sum_{i=1}^n e_i \cdot Q_i \leq E \quad (1.38)$$

Dado que (1.38) é uma restrição linear é possível utilizar o seguinte procedimento:

Determinar para cada i a respetiva quantidade económica de encomenda

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2 \cdot A_i \cdot D_i}{H_i}}$$

Se a restrição (1.38) é satisfeita, significa que a mesma não está ativa e que a solução obtida é ótima. Caso contrário, é utilizada a técnica dos multiplicadores de Lagrange. A partir de (1.37) e (1.38) constrói-se a seguinte função

$$F = \sum_{i=1}^n \left(c_i \cdot D_i + A_i \cdot \frac{D_i}{Q_i} + \frac{Q_i}{2} \cdot H_i \right) + \theta \left(\sum_{i=1}^n e_i \cdot Q_i - E \right)$$

em que θ é o parâmetro correspondente ao multiplicador de Lagrange.

Deste modo, é possível obter os valores de Q_i que minimizam 1.37 resolvendo o seguinte sistema de equações

$$\frac{\partial F}{\partial Q_i} = 0 = -A_i \cdot \frac{D_i}{Q_i^2} + \frac{H_i}{2} + \theta \cdot e_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0 = \sum_{i=1}^n e_i \cdot Q_i - E$$

Os resultados obtidos são

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2 \cdot A_i \cdot D_i}{H_i + 2 \cdot \theta^* \cdot e_i}} \quad (1.39)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(e_i \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot A_i \cdot D_i}{H_i + 2 \cdot \theta^* \cdot e_i}} \right) - E = 0 \quad (1.40)$$

O valor de θ pode ser obtido recorrendo a um método numérico como por exemplo o método de Newton-Raphson, uma vez que a função $\partial F / \partial \theta$ é uma função monótona decrescente de θ . Esta abordagem é possível estender a duas ou mais restrições, sendo que a dificuldade da determinação numérica das soluções aumenta consideravelmente com o número de restrições adicionadas.

Exemplo numérico

Um distribuidor vende três modelos de frigoríficos de diferentes marcas, o FRG-1, o FRG-2 e o FRG-3. Devido a restrições de espaço o distribuidor não pretende ter mais do que 300 frigoríficos em inventário garantindo simultaneamente que não se verifica penúria. A procura anual para cada um dos três modelos é constante e pode ser considerada determinística. O valor da procura, o custo de encomenda e o custo unitário dos três modelos estão indicados na Tabela 1.2. A taxa de posse é de 20%/€ano. Determine a quantidade óptima de encomenda para cada modelo.

Tabela 1.2 Dados do problema

Artigo i	1	2	3
Descrição	FRG-1	FRG-2	FRG-3
D_i	7500	2000	1200
c_i	250	200	100
A_i	120	150	130

O valor da quantidade óptima de cada artigo se a restrição de espaço não for considerada é:

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{2 \times 120 \times 7500}{0,2 \times 250}} = 190$$

$$Q_2^* = \sqrt{\frac{2 \times 150 \times 2000}{0,2 \times 200}} = 122$$

$$Q_3^* = \sqrt{\frac{2 \times 130 \times 1200}{0,2 \times 100}} = 125$$

o que perfaz um total de 437 unidades, excedendo o máximo admissível de 300 unidades.

Usando a expressão 1.40, determinamos o multiplicador de Lagrange θ .

$$\sqrt{\frac{2 \times 120 \times 7500}{0,2 \times 250 + 2 \times \theta}} + \sqrt{\frac{2 \times 150 \times 2000}{0,2 \times 200 + 2 \times \theta}} + \sqrt{\frac{2 \times 130 \times 1200}{0,2 \times 100 + 2 \times \theta}} = 300$$

Usando o método de Newton-Raphson¹ obtemos $\theta = 20,03$, podendo então determinar os valores de Q_i .

$$Q_1^* = 141 \quad Q_2^* = 87 \quad Q_3^* = 72$$

¹ A funcionalidade **Atingir Objectivo** (Goal Seek) do MS Excel, pode ser utilizada para determinar o valor de θ .

1.4.7.2 Custos partilhados

Os problemas de reaprovisionamento agregado onde existem custos partilhados, são frequentes em artigos encomendados a um mesmo fornecedor. Nestes problemas o custo de lançamento de encomenda ao fornecedor tem dois componentes:

- um custo fixo por cada encomenda realizada, independente do número de artigos encomendados. Este custo é partilhado pelos artigos incluídos na encomenda.
- um custo variável dependente do número de artigos que compõem a encomenda, i.e., um custo por cada artigo adicionado à encomenda.

Nestes problemas podemos ter duas abordagens diferentes, uma direta e outra indireta. A primeira consiste em agrupar os artigos em conjuntos pré-determinados, e lançar com a mesma periodicidade as encomendas dos artigos de cada conjunto. Na segunda, o período de reaprovisionamento de cada artigo é um múltiplo inteiro de um intervalo de tempo regular, pelo que os conjuntos de artigos são determinados pelo seu múltiplo. A abordagem indireta permite normalmente obter um menor custo total (Van Eijs, Heuts e Kleijnen, 1992).

O problema apresentado é um problema de abordagem indireta em que se assume que a penúria não é permitida e que o reabastecimento é instantâneo, onde se pretende determinar para um número n de artigos i , ($i = 1, \dots, n$), a periodicidade de reaprovisionamento regular T , a quantidade de encomenda de cada artigo Q_i e o respetivo intervalo de reaprovisionamento T_i , por forma a minimizar o custo total.

Neste problema, podemos ter duas políticas de reaprovisionamento, uma em que pelo menos um mesmo artigo é reaprovisionado em cada encomenda e outra em que tal não é obrigatório. A primeira é designada como política cíclica estrita (PCE) e a segunda como política cíclica (PC).

Seja A o custo fixo de colocação de encomenda a um fornecedor, a_i o custo variável de lançamento de encomenda do artigo i , c_i o seu custo unitário, D_i a sua taxa de procura constante e H_i o seu custo de posse unitário.

Tratando-se de uma abordagem indireta, onde m_i representa o inteiro múltiplo do período de reaprovisionamento regular T , então o intervalo de reaprovisionamento T_i é dado por

$$T_i = m_i \cdot T$$

e a quantidade encomendada de i por

$$Q_i = D_i \cdot T_i = D_i \cdot m_i \cdot T$$

Nestas condições os custos de aquisição por unidade de tempo são dados por

$$K_D = \sum_{i=1}^n c_i \cdot D_i.$$

Os custos de lançamento de encomenda por unidade de tempo contemplam os custos de encomenda fixos A incorridos com cada encomenda a cada período T e os custos de encomenda variáveis a cada $m_i T$ períodos de tempo, e são dados por

$$K_A = \frac{A}{T} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{m_i \cdot T}.$$

Os custos de posse por unidade de tempo são

$$K_H = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{2} \cdot H_i = \frac{T}{2} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot D_i \cdot H_i.$$

O custo total por unidade de tempo vem dado por

$$K_T(m_i's, T) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot D_i + \frac{A}{T} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{m_i \cdot T} + \frac{T}{2} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot D_i \cdot H_i \quad (1.41)$$

Para o conjunto de multiplicadores inteiros positivos $M = (m_1, \dots, m_n)$ a solução óptima para o problema com $T > 0$ (Goyal, 1974) é obtida igualando a derivada a zero

$$\frac{\partial K_T(m_i's, T)}{\partial T} = 0$$

sendo obtido o seguinte resultado

$$T^*(m_i's) = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(A + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{m_i} \right)}{\sum_{i=1}^n m_i \cdot D_i \cdot H_i}} \quad (1.42)$$

Substituindo (1.42) em (1.41) obtemos

$$K_T(m_i's) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot D_i + \sqrt{2 \cdot \left(A + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{m_i} \right) \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot D_i \cdot H_i} \quad (1.43)$$

A partir de (1.43) Os valores dos m_i 's que minimizam K_T são os que minimizam

$$F(m_i's) = \left(A + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{m_i} \right) \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot D_i \cdot H_i$$

Se as restrições de integralidade dos m_i 's for relaxada e for aplicada a derivada parcial a $F(m_i$'s) e igualada a zero

$$\frac{\partial F(m_i\text{'s})}{\partial m_j} = 0$$

fica

$$\frac{a_j}{m_j^2} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot D_i \cdot H_i + D_j \cdot H_j \cdot \left(A + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{m_i} \right) = 0$$

que expressa em função de m_j fica

$$m_j^2 = \frac{a_j \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot D_i \cdot H_i}{D_j \cdot H_j \cdot \left(A + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{m_i} \right)} \quad \forall j \in N$$

A relação entre dois artigos j e k é dada por

$$\frac{m_j^2}{m_k^2} = \frac{a_j}{D_j \cdot H_j} \frac{D_k \cdot H_k}{a_k} \quad j \neq k \quad (1.44)$$

A partir de (1.44) é possível verificar que se

$$\frac{a_j}{D_j \cdot H_j} < \frac{a_k}{D_k \cdot H_k}$$

também $m_j < m_k$.

É razoável assumir que esta condição se mantém mesmo quando se considera a restrição de integralidade dos m_i 's (Silver, 1975).

A Figura 1.9 ilustra a evolução do nível de inventário de 3 artigos com diferentes periodicidades de reposição. Os artigos têm as seguintes periodicidades, $m_1 = 1$, $m_2 = 3$ e $m_3 = 2$.

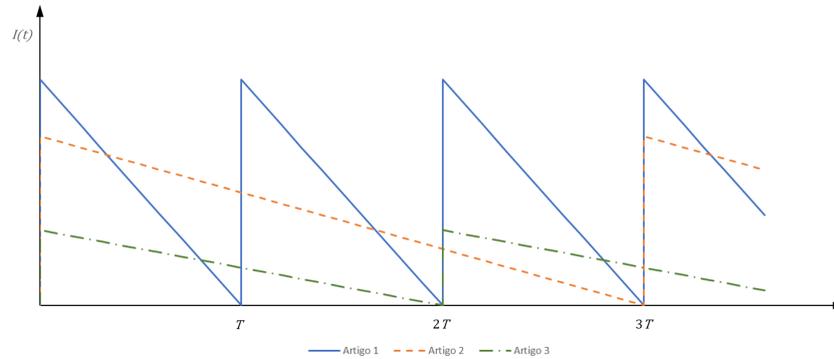


Figura 1.9 Evolução do inventário para artigos com diferentes valores de m_i

Um vez que o problema apresentado é NP-difícil, i.e., não é expectável que seja possível de o resolver com um algoritmo em tempo polinomial (Arkin, Joneja e Roundy, 1989), a forma como estes problemas são maioritariamente resolvidos é com heurísticas.

Um procedimento não iterativo simples para o problema de PCE é a heurística de Silver, 1975 (Algoritmo 2).

Algorithm 2: Heurística de Silver

```

início
   $Racio_1 \leftarrow \frac{a_1}{D_1 \cdot H_1}$ ;
   $menor \leftarrow 1$ ;
  para  $i=2$  até  $n$  fazer
     $Racio_i \leftarrow \frac{a_i}{D_i \cdot H_i}$ 
    se  $Racio_i < Racio_{menor}$  então
       $menor \leftarrow i$ ; // Seleccionar o artigo  $i$  com menor Racio
   $m_{menor} \leftarrow 1$ ;
  para cada  $i \in N \setminus \{menor\}$  fazer
     $m_i \leftarrow \left\lfloor \sqrt{\frac{a_i \cdot D_{menor} \cdot H_{menor}}{D_i \cdot H_i \cdot (A + a_{menor})}} \right\rfloor$ 
    se  $m_i = 0$  então
       $m_i \leftarrow 1$ 
     $T^* \leftarrow \sqrt{\frac{2 \cdot (A + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{m_i})}{\sum_{i=1}^n D_i \cdot H_i \cdot m_i}}$ 
  para cada  $i \in N$  fazer
     $Q_i \leftarrow m_i D_i T^*$ ; // Calcular a quantidade a encomendar de cada  $i$ 
  
```

Exemplo numérico

Um empresa vende quatro tipos de televisores, o de 43", o de 32", o de 28" e o de 24". A procura anual para cada um dos quatro artigos e o custo unitário estão indicados na Tabela 1.3. De cada vez que é feita lançada uma encomenda ao fornecedor, a empresa incorre num custo de 3000 €. Adicionalmente existe um custo variável de 250 € por artigo, em resultado das operações de receção e armazenamento. A taxa de posse de 20%/€.ano.

Aplicando a Heurística de Silver, obtemos o artigo 1 como o artigo com menor *Racio*. Determinados os valores de m_i é calculado o valor de T^* (1.45) e determinada a dimensão do lote de cada artigo Q_i .

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \times (3000 + \frac{250}{1} + \frac{250}{1} + \frac{250}{2} + \frac{250}{3})}{0,20 \times (1 \times 15000 \times 400 + 1 \times 1200 \times 370 + 2 \times 800 \times 210 + 3 \times 300 \times 150)}} \quad (1.45)$$

Tabela 1.3 Problema dos televisores

Artigo i	1	2	3	4
Descrição	43"	32"	28"	24"
D_i	15000	1200	800	300
c_i	400	370	210	150
$a_i/D_i H_i$	0,0002	0,0028	0,0074	0,0278
m_i	1	1	2	3
	$T^* = 0.0732$ anos			
Q_i	1098	88	117	66

A heurística RAND (Algoritmo 3), inicialmente proposta por Kaspi e Rosenblatt, 1991, tem-se revelado muito eficiente na resolução deste tipo de problemas. Esta heurística consiste em determinar um número de intervalos regulares de tempo, no intervalo $[T_{min}, T_{max}]$, limites correspondentes ao limite inferior e superior do problema e determinar a cada iteração um novo tempo de ciclo para cada artigo i .

Algorithm 3: Algoritmo RAND

```

inicio
  Calcular  $T_{min}$  e  $T_{max}$ 


$$T_{min} \leftarrow \min \sqrt{\frac{a_i}{D_i \cdot H_i}} \quad \forall 1 \leq i \leq n$$



$$T_{max} \leftarrow \sqrt{\frac{2(A + \sum_{i=1}^n a_i)}{\sum_{i=1}^n D_i \cdot H_i}}$$


  Dividir o intervalo  $[T_{min}, T_{max}]$  em  $m$  diferentes intervalos idênticos  $T$ ,
   $(T_1, \dots, T_m)$ . O valor de  $m$  é determinado pelo decisor.
   $j \leftarrow 0$ .
  repetir
     $j \leftarrow j + 1$ .
     $r \leftarrow 0$ .
    repetir
       $r \leftarrow r + 1$ 
      para cada  $i \in N$  fazer

$$m_{i,r} \leftarrow \left\lfloor \sqrt{\frac{2 \cdot a_i \cdot T_j^2}{D_i \cdot H_i}} \right\rfloor$$


$$T_j \leftarrow \sqrt{\frac{2 \cdot (A + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{m_{i,r}})}{\sum_{i=1}^n m_{i,r} \cdot D_i \cdot H_i}}$$

    até  $r \neq 1$  and  $m_{i,r} = m_{i,r-1} \forall i \in N$ ;
  até  $j=m$ ;
   $T \leftarrow T_j$ 
  para cada  $i \in N$  fazer
     $m_i \leftarrow m_{i,r}$ 
  
```

Referências

- Arkin, Esther, Dev Joneja e Robin Roundy (1989). “Computational complexity of uncapacitated multi-echelon production planning problems”. Em: *Operations research letters* 8.2, pp. 61–66.
- Goyal, Sureh K (1974). “Determination of optimum packaging frequency of items jointly replenished”. Em: *Management Science* 21.4, pp. 436–443.
- Harris, Ford W (1913). “How many parts to make at once”. Em: *Factory, The Magazine of Management* 10.2, pp. 135–136, 152.
- Kaspi, Moshe e Meir J Rosenblatt (1991). “On the economic ordering quantity for jointly replenished items”. Em: *The International Journal of Production Research* 29.1, pp. 107–114.
- Silver, Edward A (1975). “Modifying the economic order quantity (EOQ) to handle coordinated replenishment of two or more items”. Em: *Production & Inventory Management* 16.3, pp. 26–38.
- Van Eijs, MJG, Rudolf Maria Jozef Heuts e Jacobus Petrus Catharinus Kleijnen (1992). “Analysis and comparison of two strategies for multi-item inventory systems with joint replenishment costs”. Em: *European Journal of Operational Research* 59.3, pp. 405–412.

Capítulo 2

Métodos de previsão na gestão de inventários

2.1 Introdução

A necessidade de realizar previsões está presente em muitos contextos da nossa vida atual. Seja na previsão meteorológica, previsão de preços de ações ou de vendas futuras de um artigo, elas desempenham um papel fundamental nos nossos processos de tomada de decisão. Nas empresas as decisões são tomadas para persecução de objectivos que podem ser atingidos a partir de diferentes linhas de acção, onde cada uma tem associados diferentes resultados possíveis e dos quais não se controla qual o resultado que efetivamente se obtém. O processo de tomada de decisão é assim realizado em ambiente de incerteza. Estes processos de decisão de problemas com incerteza melhoram se para cada linha de acção forem reduzidos os resultados possíveis e a cada um desses resultados for atribuída uma probabilidade de ocorrência.

Os métodos de previsão compreendem um conjunto de ferramentas usadas para prever um evento futuro com base em informações do passado, permitindo assim definir a forma como as variáveis incontroláveis do processo de decisão se poderão comportar no futuro e avaliar os resultados associados a cada linha de acção e portanto, contribuir para uma melhor tomada de decisão.

Os métodos de previsão são normalmente classificados com base no horizonte temporal da previsão. Estes podem ser de:

- curto prazo - para previsões de problemas de natureza operacional como o escalonamento de trabalhadores, programação de rotas de transportes ou programação da produção. Tipicamente são realizadas para um horizonte temporal de 3 meses.
- médio prazo - para previsões de problemas de natureza tática como a determinação de recursos futuros, como por exemplo equipamentos. Compreendem um horizonte temporal de 3 meses a 3 anos.

- longo prazo - para previsões de problemas de natureza estratégica como a localização de instalações. Compreendem um horizonte temporal superior a 3 anos.

É importante referir que os horizontes temporais são diferentes consoante a atividade de cada empresa.

Um outro critério de classificação dos métodos de previsão está relacionado com os dados quantificados disponíveis para a previsão. Os dois grande grupos são:

- métodos qualitativos - são métodos utilizados sempre que para a previsão a realizar, não existem dados históricos disponíveis (por exemplo, no lançamento de um produto inovador) ou os que existem não são relevantes em resultado de alterações significativas no contexto passado. Não usam dados quantificados e assentam em juízos subjetivos e especulações baseadas na experiência e na intuição de especialistas.
- métodos quantitativos - são métodos utilizados quando existem dados históricos quantificados da variável que se pretende prever e se pressupõem que as condições que regeram a evolução da variável no passado se vão manter no futuro. Estes métodos podem ainda ser divididos em :
 - métodos causais - estes métodos procuram relacionar a variável a prever com outras variáveis que possam explicar o seu comportamento. Estão vocacionados para previsões a médio prazo.
 - métodos extrapolativos / séries temporais - estes métodos assentam na análise da forma como evoluiu uma variável no passado e extrapolam o seu padrão de comportamento para o futuro. Estão vocacionados para previsões de curto prazo.

Neste livro, serão tratados métodos e modelos de previsão aplicados a séries temporais, no âmbito da gestão de inventários.

2.2 As componentes de uma série temporal

Uma série temporal é um conjunto ordenado de valores observados de uma variável em períodos regulares de tempo. O desenvolvimento de modelos estatísticos aplicados a séries temporais tem como objetivo descrever o comportamento probabilístico do processo estocástico de tempo discreto subjacente que, se acredita, gerou os valores observados. É assim importante fazer a distinção entre uma série temporal e um processo estocástico de tempo discreto.

Um processo estocástico de tempo discreto é um conjunto de variáveis aleatórias indexadas por um conjunto de tempos $t \in \mathbb{N}$ em que o processo foi, será ou poderá ser observado, i.e,

$$\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty} = \{\dots, Y_1, Y_2, \dots, Y_t, Y_{t+1}, \dots\}$$

onde cada variável Y_t é uma variável aleatória descrita pela mesma distribuição de probabilidade F_Y , e representada pela notação $Y_t \sim F_Y$.

Por sua vez, uma série temporal é entendida como uma realização de um processo estocástico $\{y_t\}_{t=1}^T$ com T observações, e é representada por

$$\{y_t\}_{t=1}^T = \{y_1, y_2, \dots, y_T\}$$

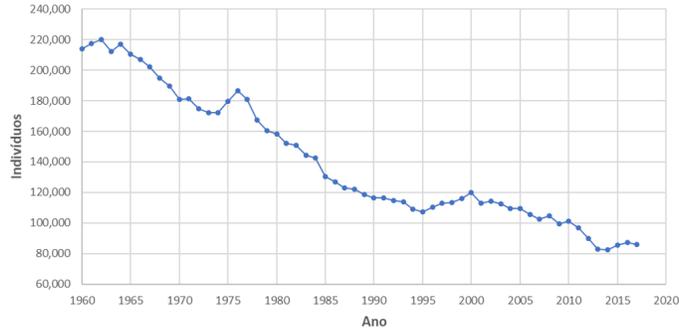
É a partir da amostra de observações que se estimam as características dos modelos das séries temporais. É frequente em análise estatística de dados assumir que as observações de uma amostra são independentes e identicamente distribuídas (iid) se todas tiverem a mesma distribuição de probabilidade e forem mutuamente independentes. Nas séries temporais pretende-se tirar partido da hipótese das variáveis serem identicamente distribuídas mas não impor a hipótese das variáveis serem independentes, pois é a relação de dependência que se pretende compreender para possibilitar a realização de previsões.

A forma como as séries temporais se comportam e as características que exibem, podem frequentemente ser inferidas a partir da sua representação gráfica. Alguns exemplos de séries temporais podem ser observados na Figura 2.1.

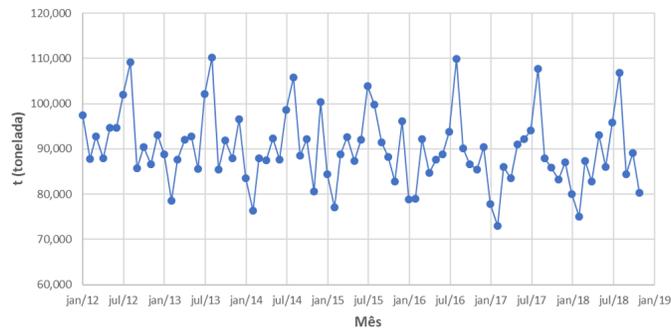
A Figura 2.1(a) apresenta o número de nascimentos em Portugal desde 1960. Nesta série não se verifica sazonalidade, mas existe uma óbvia tendência de decréscimo. A Figura 2.1(b) mostra o consumo mensal de gasolina em Portugal entre janeiro de 2012 e dezembro de 2018. A série temporal apresenta uma forte sazonalidade em cada ano. Aparentemente, não se verifica a existência de uma tendência nos dados da série ao longo deste período. A Figura 2.1(c) ilustra as vendas semanais do artigo P-385567 numa loja de retalho nas primeiras 20 semanas de 2018. A série não apresenta indicações de tendência nem sazonalidade. Há no entanto flutuações aleatórias que não parecem ser muito previsíveis.

Os diferentes comportamentos exibidos pelas séries temporais, podem ser caracterizados através de quatro componentes:

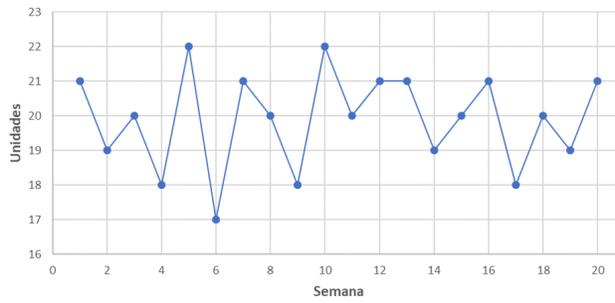
- Tendência (T) - Reflete a evolução global da variável no longo prazo e traduz o seu ritmo de crescimento ou decréscimo. A forma do padrão de tendência pode ser linear ou não-linear.
- Ciclo (C) - Consiste em oscilações não-periódicas, com repercussões no médio prazo. Habitualmente atribuível aos ciclos económicos de expansão ou contração da atividade económica.
- Sazonalidade (S) - Consiste na flutuação periódica da variável, sentida no curto prazo, associada a um ciclo sazonal. Esta pode estar relacionada com o clima, pois existem negócios cujo volume está fortemente relacionado com as estações do ano (e.g. estâncias de ski ou de praia), ou estar relacionada com convenções e costumes (e.g. a venda de brinquedos aumenta fortemente no período que antecede o Natal)



(a) Nados-vivos de mães residentes em Portugal



(b) Consumo mensal de gasolina em Portugal



(c) Vendas semanais do artigo P-385567

Figura 2.1 Exemplos de séries temporais

- Erro/Componente aleatória (ε) - Reflete a variação aleatória, não explicada pelas restantes componentes. Corresponde ao resíduo que sobra da série após retiradas as restantes componentes.

Dada a natureza não periódica de médio prazo do ciclo, torna-se por vezes difícil a distinção em relação à tendência, pelo que frequentemente, as componentes tendência e ciclo são agrupadas numa única componente designada tendência-ciclo.

2.3 Parametrização e seleção de modelos de previsão para séries temporais

O processo de determinação de um modelo de previsão de uma série temporal genericamente compreende as seguintes etapas:

- Selecionar o modelo subjacente da procura
- Selecionar os métodos de previsão a avaliar
- Parametrizar os modelos
- Avaliar e selecionar o modelo a utilizar
- Definir a ferramenta de controlo do modelo

A seleção do modelo subjacente da procura (ou da variável a prever) depende de um conjunto de fatores relacionados com as características dos dados históricos da série temporal (e.g. as componentes da série temporal, o horizonte temporal de previsão). Nesta fase é feita uma análise dos dados de forma a permitir delimitar os métodos de previsão que se apresentam como os mais adequados para aplicar à série temporal.

Após a identificação do modelo subjacente devem ser selecionados os métodos adequados ao mesmo. A partir deste ponto os modelos obtidos devem ser parametrizados utilizando os dados históricos da série temporal. A fase seguinte, a avaliação dos modelos, consiste em comparar o desempenho dos diferentes modelos. Parametrizar e avaliar os modelos muitas vezes se confunde, pois a parametrização e a avaliação são realizadas utilizando dados históricos e frequentemente os mesmos critérios (métricas).

Após a definição dos parâmetros do modelo a utilizar na previsão, devem ser estabelecidos critérios de controle de qualidade das previsões obtidas pelo modelo, para permitir os ajustes necessários quando se verificarem alterações aos padrões de comportamento da variável a prever.

2.3.1 *Análise de autocorrelação*

Os métodos aplicados a séries temporárias baseiam-se na caracterização da evolução histórica da variável a prever, i.e., no pressuposto que aspetos dos padrões de comportamento do passado se manterão no futuro.

Como já foi referido, a análise da representação gráfica das séries temporais é uma forma de identificar as componentes da séries temporais, pelo que a

análise das séries temporais deve ser sempre iniciada por uma representação gráfica da mesma. No entanto nem sempre as componentes de uma série temporal são fáceis de analisar a partir da representação gráfica.

A análise de autocorrelação de uma série temporal é um método estatístico que permite revelar a estrutura de componentes da série temporal.

A autocorrelação descreve a correlação entre os valores da série temporal em diferentes instantes no tempo, i.e., descreve a correlação da série temporal com uma sua cópia desfasada k unidades de tempo. O coeficiente de autocorrelação para um desfasamento k pode ser estimado a partir de

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n (y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y}) / (n - k - 1)}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2 / (n - 1)}$$

em que y_t corresponde aos n valores observados de uma série temporal $\{y_t\}_{t=1}^n$ e $k < n - 1$. O coeficiente de autocorrelação varia entre -1 e 1 em que -1 representa uma relação negativa forte, 1 uma relação positiva forte e 0 a nenhuma relação.

A função de autocorrelação (FAC) expressa a autocorrelação em função do desfasamento k ($k = 1, \dots, m$). A representação gráfica da FAC designa-se por correlograma. A partir da análise do correlograma é possível inferir sobre as componentes da série temporal.

O número de desfasamentos m a incluir na FAC proposto por Box e Jenkins, 1976 é $n/4$ em que n representa o número de observações. Alguns softwares utilizam como valor recomendado $m = 10 \times \log_{10}(n)$.

Exemplo numérico

A Figura 2.2 ilustra o cálculo dos coeficientes de autocorrelação para a série representada na Figura 2.1(c).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	t	y_t		k	FAC		<i>média</i>	19,9
2	1	21		1	-0,60		n	20
3	2	19		2	0,29			
4	3	20		3	0,06			
5	4	18		4	-0,30			
6	5	22		5	0,21			
7	6	17						
8	7	21						
9	8	20						
10	9	18						
11	10	22						
12	11	20						
13	12	21						
14	13	21						
15	14	19						
16	15	20						
17	16	21						
18	17	18						
19	18	20						
20	19	19						
21	20	21						
22								
	Célula	Fórmula						Copiar para
	E2	=(SOMARPRODUTO(\$B\$2:ÍNDICE(\$B\$2:\$B\$21;\$H\$2-D2;1)-\$H\$1;B3:\$B\$21-\$H\$1))/(\$H\$2-D2-1))/(SOMARPRODUTO((\$B\$2:\$B\$21-\$H\$1)^2))/(\$H\$2-1))						E3:E6

Figura 2.2 Cálculo dos coeficiente de autocorrelação

Quando a série apresenta tendência, as observações mais recentes tendem a ter valores mais próximos. Assim os coeficiente de autocorrelação para os defasamentos menores, tendem a ser elevados e positivos, e diminuem lentamente à medida que os defasamentos aumentam. A Figura 2.3 ilustra o correlograma da série Nados vivos de mães residentes em Portugal, apresentada na Figura 2.1(a).

As linhas vermelhas a traço interrompido determinam o intervalo que indica se as correlações são significativamente diferentes de zero. Um coeficiente é considerado diferente de zero, se com um intervalo de confiança a 95%, se situa fora no intervalo $\pm 1.96/\sqrt{n}$. Se os valores da FAC de uma série tempo-

ral são próximos de zero, para todo o $k > 0$, significa que a série temporal não apresenta autocorrelação.

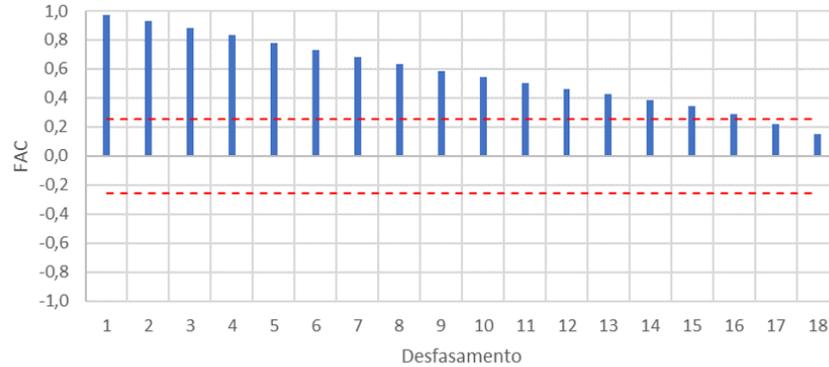


Figura 2.3 Correlograma da série Nados-vivos de mães residentes em Portugal

A componente de sazonalidade, formalmente definida como dependência correlacional da ordem k entre cada observação y_t e a observação y_{t-k} , pode ser identificada na FAC pela existência de picos, nos defasamentos que distam múltiplos do comprimento da sazonalidade. Na Figura 2.4, podemos observar que, $\hat{\rho}_{12}$, $\hat{\rho}_{24}$ e $\hat{\rho}_{36}$ são maiores do que os outros coeficientes. Isso deve-se ao padrão sazonal anual dos dados, i.e, repete-se a cada 12 meses. Também se observa que $\hat{\rho}_6$, $\hat{\rho}_{18}$ e $\hat{\rho}_{30}$ são menores que os restantes coeficientes, estando defasados dos picos 6 meses.

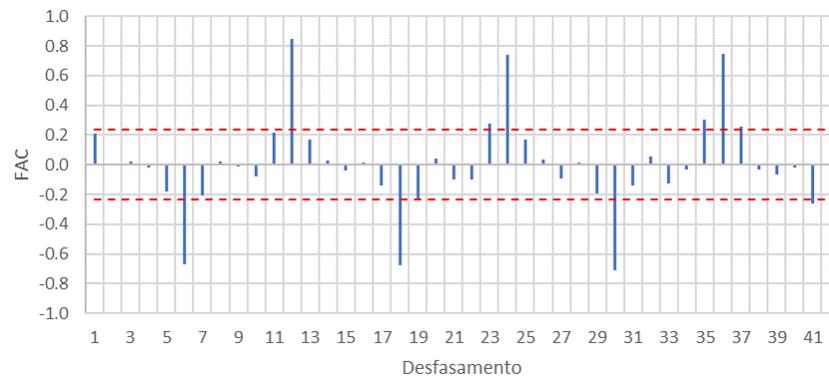


Figura 2.4 Correlograma da série Consumo mensal de gasolina em Portugal

A Figura 2.5 apresenta o correlograma da série temporal representada na Figura 2.1(c) e com os cálculos na Figura 2.2. Como é possível observar, a série apresenta uma autocorrelação significativa para $k = 1$, que com o aumento do desfasamento, vai diminuindo o valor absoluto rapidamente para 0, indicando que se trata de uma série temporal estacionária.

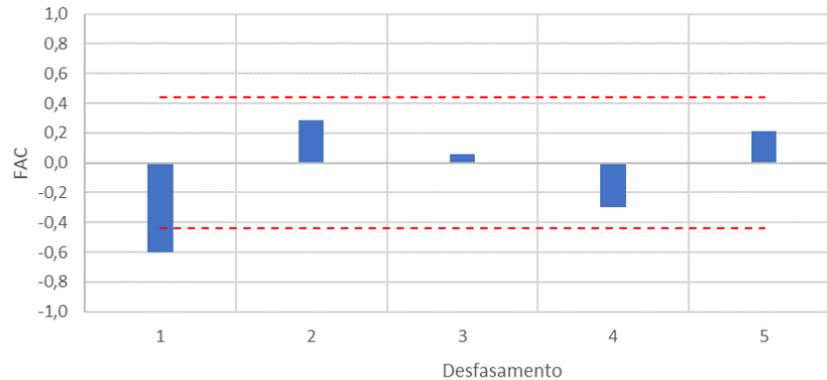


Figura 2.5 Correlograma da série Vendas semanais do artigo P-385567

2.3.2 Estacionaridade

A estacionaridade é uma importante característica de um processo estocástico, no qual os parâmetros estatísticos (valor esperado e variância) não variam com o tempo, i.e., para um processo estocástico $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ a distribuição conjunta de $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_r})$ de dimensão r é idêntica à distribuição conjunta de $(Y_{t_1+h}, Y_{t_2+h}, \dots, Y_{t_r+h})$, $\forall h \in \mathbb{N}$. Esta definição de estacionaridade é designada como estacionaridade estrita. No entanto, esta característica é muito exigente, raramente se contra na realidade, e não é possível de verificar a partir das observações de uma série temporal, pois trata-se de uma propriedade de todas as distribuições conjuntas do processo. Na prática o que se encontra são processos fracamente estacionários, suficientemente próximos de processos estritamente estacionários para poderem ser tratados como tal.

Um processo diz-se fracamente estacionário (ou estacionário em covariância) se o valor esperado e a variância não dependem de t e a covariância existe, é finita e apenas depende do desfasamento h .

Formalmente um processo estocástico $\{Y_t\}_{t=1}^{\infty}$ diz-se fracamente estacionário se

$$\begin{aligned} E[Y_t] &= \mu & \forall t \\ \text{var}(Y_t) &= \sigma^2 & \forall t \\ \text{cov}(Y_t, Y_{t-h}) &= \gamma_h \forall t, h & (h \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Assim, séries temporais com tendência ou com sazonalidade, são séries não estacionárias, pois a tendência e a sazonalidade condicionarão o valor da série temporal em diferentes instantes de tempo.

Um exemplo particular de séries temporais não estacionárias são as séries temporais localmente estacionárias. Nestas séries, os parâmetros estatísticos mudam lentamente ao longo do tempo, pelo que quando uma parte da série é analisada pode parecer estacionária mas quando analisada na totalidade não.

Um processo é localmente estacionário se durante períodos curtos de tempo se comporta como estacionário, i.e., um processo $\{Y_{t,T} : t = 1, \dots, T\}_{t=1}^{\infty}$ é localmente estacionário se em torno de cada tempo re-escalado $u \in [0, 1]$ o processo $\{Y_{t,T}\}$ pode ser aproximado por um processo estacionário $\{Y_t(u) : t \in \mathbb{Z}\}$, num sentido estocástico (Dahlhaus, 1997).

Processo de Ruído Branco

Um exemplo de um processo estocástico fracamente estacionário é o processo de Ruído Branco. Um processo ruído branco ou processo iid, é definido como um processo estocástico $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ em que cada variável tem uma distribuição idêntica e independente de média zero e variância finita e constante $Y_t \sim iid N(0, \sigma^2)$.

Formalmente $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ é um processo de ruído branco se

$$\begin{aligned} E[Y_t] &= 0 & \forall t \\ \text{var}(Y_t) &= \sigma^2 & \forall t \\ \text{cov}(Y_t, Y_{t-h}) &= 0 \forall t, h & (h \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Para séries temporais de ruído branco é espectável que a FAC seja próxima de zero, i.e, todos os coeficientes de autocorrelação estarem dentro dos limites.

A Figura 2.6 ilustra uma série ruído branco e a Figura 2.7 apresenta a correspondente FAC. Como se pode verificar, todos os coeficientes de autocorrelação estão dentro dos limites, confirmando que os dados são ruído branco.

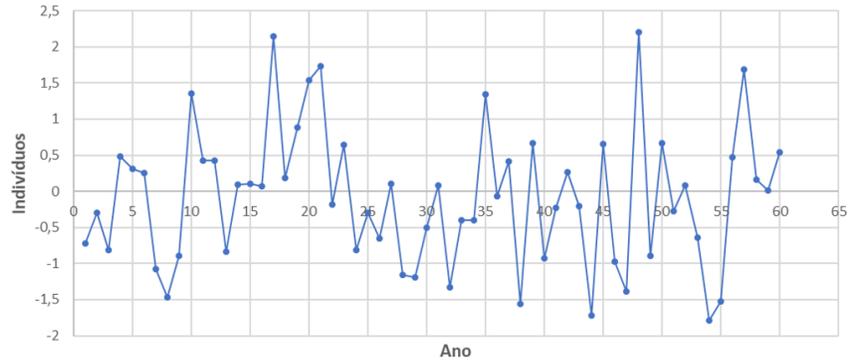


Figura 2.6 Uma série ruído branco

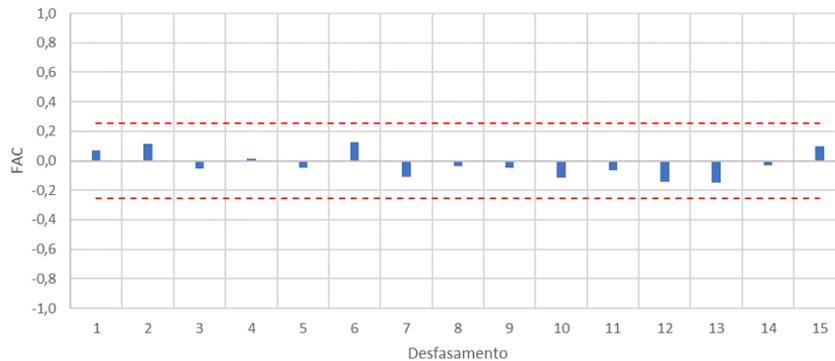


Figura 2.7 Correlograma da série ruído branco

Teste de estacionaridade

A ferramenta principal para verificação da estacionaridade é a inspeção visual da série temporal acompanhada da FAC. No entanto nem sempre é fácil verificar pela análise visual se uma série tem valor esperado ou variância constante, ou mesmo se a covariância é constante para o mesmo desfasamento.

Existe contudo um conjunto de testes estatísticos que podem ser realizados sobre os dados da série temporal.

Os testes de estacionaridade que são utilizados com maior frequência são o teste de Dickey-Fuller (Dickey e Fuller, 1979), o teste de Dickey-Fuller Aumentado (DFA) (Said e Dickey, 1984), o teste de Phillips-Perron (Phillips

e Perron, 1988) e o teste de KPSS (Kwiatkowski et al., 1992). O teste DFA apresenta face aos restantes a vantagem de ser um teste fiável e ser menos complexo de implementar.

O teste de Dickey-Fuller é baseado no seguinte processo estocástico linear

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.1)$$

onde $|\phi_1| \leq 1$ e ε_t é um ruído branco, e

$$m - \phi_1 = 0$$

é a sua equação característica, onde m é uma sua raiz. Se o processo tem uma raiz unitária, $m = 1$, então a série não é estacionária.

As hipóteses a considerar são:

$$\begin{aligned} H_0 : \phi_1 = 1 & \quad \text{o processo é não-estacionário} \Rightarrow y_t \sim I(1) \\ H_1 : |\phi_1| < 1 & \quad \text{o processo é estacionário} \Rightarrow y_t \sim I(0) \end{aligned}$$

A estatística de teste é

$$t_{\phi_1=1} = \frac{\hat{\phi}_1 - 1}{s(\hat{\phi}_1)}$$

onde $\hat{\phi}_1$ é um estimador de mínimos quadrados de ϕ_1 e $s(\hat{\phi}_1)$ é o erro padrão do $\hat{\phi}_1$. Quando a H_0 é verdadeira a estatística de teste segue a distribuição de Dickey-Fuller. Os valores críticos desta distribuição foram obtidos por simulação.

Para calcular a estatística de teste, começamos por subtrair y_{t-1} aos dois lados de (2.1), i.e.,

$$y_t - y_{t-1} = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - y_{t-1} \quad (2.2)$$

Utilizando o operador Δ definido por $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ e fazendo $\beta = \phi_1 - 1$, a equação (2.2) fica

$$\Delta y_t = \beta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.3)$$

em que β é estimado através do método dos mínimos quadrados.

Assim o teste de ϕ_1 é transformado no teste de hipóteses

$$\begin{aligned} H_0 : \beta = 0 & \quad \text{equivalente a } \phi = 1 \\ H_1 : \beta < 0 & \quad \text{equivalente a } |\phi| < 1 \end{aligned}$$

Uma vez que estatística de teste não segue uma distribuição normal, não pode ser aplicada a habitual estrutura de teste do parâmetro β . O teste consiste em determinar se a estatística τ (equivalente à estatística t) é menor que o $\tau_{crítico}$, retirado da tabela de valores críticos da distribuição de Dic-

key-Fuller. Se $\tau < \tau_{crítico}$ a hipótese nula, $H_0 : \beta = 0$, deverá ser rejeitada, caso contrário aceitamos a hipótese nula que a série não é estacionária.

A Tabela A.1 dos anexos, apresenta os valores críticos da distribuição estatística τ de Dickey-Fuller.

O processo (2.1) pode ser estendido pela inclusão de uma constante ou de tendência linear. A tabela 2.1 resume as três versões do teste.

Tabela 2.1 Versões do teste de Dickey-Fuller

Versão	Restrições da regressão	Equação
Modelo I	Sem constante, sem tendência	$\Delta y_t = \beta y_{t-1} + \epsilon_t$
Modelo II	Com constante, sem tendência	$\Delta y_t = \alpha + \beta y_{t-1} + \epsilon_t$
Modelo III	Com constante, com tendência	$\Delta y_t = \alpha + \beta y_{t-1} + \gamma t + \epsilon_t$

Exemplo numérico

A Figura 2.8 apresenta uma folha de cálculo, em que na coluna B são indicados os valores das vendas diárias de um artigo (y_t) ao longo de 25 dias e no lado direito da figura a correspondente representação gráfica.

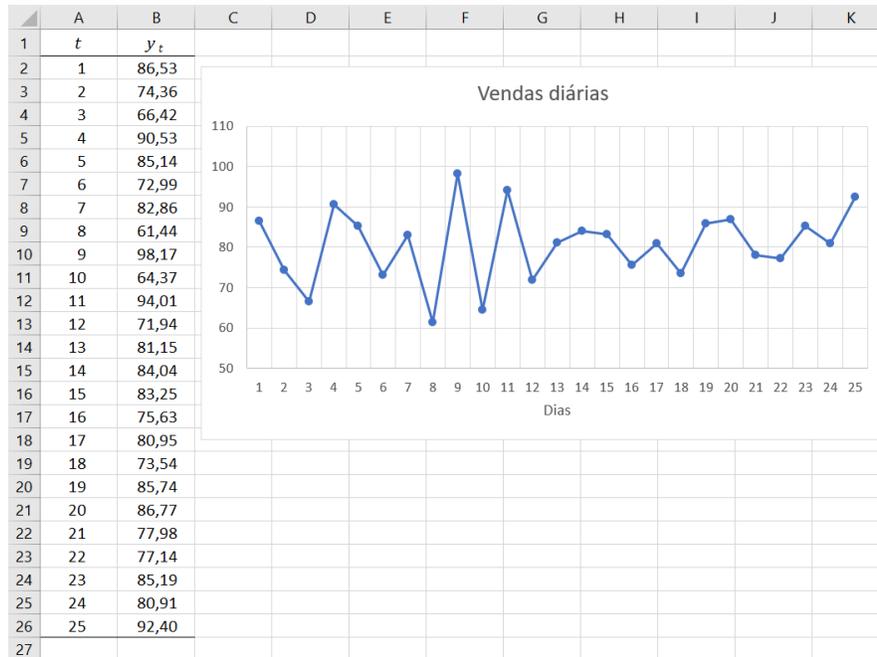


Figura 2.8 Dados para o teste de Dickey-Fuller

A partir da representação gráfica começamos por assumir que a versão que melhor se ajusta é o Modelo II. A implementação do teste de Dickey-Fuller numa folha de cálculo está apresentado nas figuras 2.9 e 2.10.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1	t	y_t	Δy_t								
2	1	86,53			SUMÁRIO DOS RESULTADOS						
3	2	74,36	-12,17								
4	3	66,42	-7,94		<i>Estatística de regressão</i>						
5	4	90,53	24,11		R múltiplo	0,89042					
6	5	85,14	-5,39		Quadrado de R	0,79284					
7	6	72,99	-12,15		Quadrado de R ajustado	0,78343					
8	7	82,86	9,87		Erro-padrão	7,5534					
9	8	61,44	-21,42		Observações	24					
10	9	98,17	36,73								
11	10	64,37	-33,80		ANOVA						
12	11	94,01	29,64			<i>gl</i>	<i>SQ</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>≥ significân</i>	
13	12	71,94	-22,07		Regressão	1	4803,97	4803,97	84,2005	5,6E-09	
14	13	81,15	9,21		Residual	22	1255,19	57,0539			
15	14	84,04	2,89		Total	23	6059,15				
16	15	83,25	-0,79								
17	16	75,63	-7,62			<i>Coefficiente</i>	<i>erro-padrão</i>	<i>Stat t</i>	<i>valor P</i>	<i>15% inferior</i>	
18	17	80,95	5,32		Interceptar	129,498	14,17	9,13886	6,1E-09	100,111	
19	18	73,54	-7,41		Variável X 1	-1,61478	0,17598	-9,17608	5,6E-09	-1,97974	
20	19	85,74	12,20								
21	20	86,77	1,03								
22	21	77,98	-8,79								
23	22	77,14	-0,84								
24	23	85,19	8,05								
25	24	80,91	-4,28								
26	25	92,40	11,49								
27											
Célula			Fórmula							Copiar para	
C3			=B3-B2							C4:C26	

Figura 2.9 Implementação numa folha de cálculo do teste de Dickey-Fuller

O processo inicia-se com o cálculo de Δy_t , que é implementado na célula C3 e cuja formula é copiada para as células C4 a C26. De seguida, é realizada uma regressão linear simples, utilizando a ferramenta de análise **Regressão** do suplemento **Análise de Dados**¹. O campo **Intervalo Y** é preenchido com o intervalo de dados C3:C26 e o campo **Intervalo X** com o intervalo de dados B2:B25 (Figura 2.10).

O resultado da análise de regressão é mostrada no lado direito da Figura 2.9. É possível verificar que a estatística de teste t (célula H19) para o coeficiente β é -9,17608. Na Tabela Dickey-Fuller A.1 o valor de $\tau_{critico}$ para

¹ Se o comando **Análise de Dados** não estiver disponível no separador **Dados**, o suplemento **Analysis ToolPak** terá que ser carregado.

$n = 25$ e $\alpha = 0,05$ é $-2,985$. Dado que $-9,17608 \leq -2,985$ podemos rejeitar a hipótese nula de que a série temporal não é estacionária.

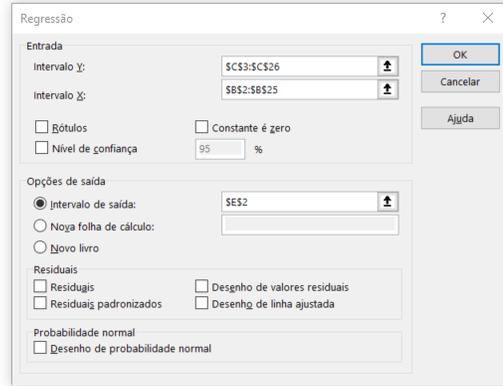


Figura 2.10 Janela da ferramenta **Regressão**

Existem no entanto processos com uma estrutura mais complexa que os apresentados em (2.1), e cuja aplicação a esses processos leva a que o erro ϵ_t apresente autocorrelação, e assim não tenha características de ruído branco. Desta forma, as estatísticas de teste deixam de ter as propriedades que lhe são atribuídas.

Said e Dickey, 1984 estenderam o processo (2.1) de forma a poder tratar modelos com uma estrutura mais complexa, acrescentado desfasamentos da variável dependente, por forma a que a o erro ϵ_t seja ruído branco. Este teste designa-se por Teste de Dickey-Fuller Aumentado (DFA). Na tabela (2.2) são apresentadas as três versões do teste Dickey-Fuller Aumentado.

Tabela 2.2 Versões do teste de Dickey-Fuller Aumentado

Versão	Restrições da regressão	Equação
Modelo I	Sem constante, sem tendência	$\Delta y_t = \beta y_{t-1} + \sum_{j=1}^h \gamma_j \Delta y_{t-j} + \epsilon_t$
Modelo II	Com constante, sem tendência	$\Delta y_t = \alpha + \beta y_{t-1} + \sum_{j=1}^h \gamma_j \Delta y_{t-j} + \epsilon_t$
Modelo III	Com constante, com tendência	$\Delta y_t = \alpha + \beta y_{t-1} + \sum_{j=1}^h \gamma_j \Delta y_{t-j} + \epsilon_t$

A determinação do número de desfasamentos a utilizar está relacionada com a potencia do teste. Se forem incluídos desfasamentos a mais podem estar a ser diminuída a potencia do teste, se forem incluídos desfasamentos a menos podemos incorrer na distorção do teste.

Existem diversos procedimentos que podem ser utilizados para determinação do número de desfasamentos a utilizar. O procedimento sequencial *geral para específico* proposto em Hall, 1994 oferece um bom desempenho (Ng e Perron, 1995). Este procedimento consiste:

- Atribuir um limite superior para h , h_{max}
- Estimar a regressão do teste DFA com $h = h_{max}$
- Se o valor absoluto da estatística t do último desfasamento for maior que 1,645, define-se $h = h_{max}$ e realiza-se o teste DFA. Caso contrário, diminui-se h em uma unidade e repete-se o processo.

Uma regra para determinar o número máximo inicial de desfasamentos é utilizar o valor proposto por Schwert, 1989

$$h_{max} = \lfloor 12(n/100)^{1/4} \rfloor.$$

2.3.3 Métricas

A parametrização e avaliação de modelos de previsão são maioritariamente realizadas com recurso a métricas que permitem quantificar a sua eficiência. Estas métricas podem ser divididas em dois grandes grupos, as métricas de precisão de previsão que medem o erro, i.e, a proximidade entre o valor observado e o valor previsto, e as métricas de precisão da implicação, que medem o alcance das objetivos de gestão de inventários.

A consideração de métricas para além das que medem o erro é importante pois diversos estudos demonstraram que a eficiência dos sistemas de gestão de inventários não está necessariamente diretamente relacionada com o desempenho do modelo de previsão, medido pelas medidas de erro de previsão.

2.3.3.1 Métricas de precisão da previsão

As métricas de precisão da previsão apresentadas são baseadas na classificação de Hyndman, 2006.

Métricas dependentes da escala

As métricas dependentes da escala são geralmente fáceis de calcular e baseiam-se no cálculo dos erros de previsão $e_t = y_t - F_t$, em que y_t corresponde ao valor observado da série temporal e F_t ao valor da previsão, no período t . As métricas dependentes da escala mais utilizadas, são definidas para n observações amostrais como:

- Erro médio

$$\text{EM}(n)_t = \frac{\sum_{i=t-n+1}^t (y_i - F_i)}{n}$$

- Erro absoluto médio

$$\text{EAM}(n)_t = \frac{\sum_{i=t-n+1}^t |y_i - F_i|}{n}$$

- Erro quadrático médio

$$\text{EQM}(n)_t = \frac{\sum_{i=t-n+1}^t (y_i - F_i)^2}{n}$$

Estas métricas apresentam algumas desvantagens. Ao depender da escala da série temporal apenas faz sentido comparar diferentes modelos para a mesma série. Comparações entre séries não fazem sentido. Em alguns cenários de procura intermitente, estas métricas tendem a enviesar as previsões em favor de previsões de procura zero, não sendo portanto um bom input para as decisões de gestão de inventários.

Métricas percentuais

As métricas percentuais baseiam-se no cálculo dos erros percentuais, $p_t = 100e_t/y_t$, e medem o erro em cada período como uma percentagem da procura observada no período t .

A remoção da escala nas métricas do erro permite a comparação de modelos de previsão em várias séries de dados. A métrica percentual mais frequente é o erro percentual absoluto médio (EPAM) e é definida como

$$\text{EPAM}(n)_t = \frac{\sum_{i=t-n+1}^t |p_i|}{n}$$

Uma desvantagem da métrica é a possibilidade de esta tomar o valor infinito ou indefinido se houver valores zero na série temporal, como é frequente em séries temporais intermitentes. Adicionalmente, os erros percentuais podem ter uma distribuição extremamente distorcida quando os valores observados são próximos de zero.

Métricas relativas

As métricas relativas surgem como alternativa às métricas percentuais, e baseiam-se no cálculo do erro relativo $r_t = e_t/E_t$, onde E_t é o erro obtido utilizando um modelo de previsão de referência, i.e, um modelo de *benchmark*. O objetivo é comparar o desempenho de um modelo com o de *benchmark* para obter uma medida de melhoria desse modelo. Normalmente, o método ingênuo é o utilizado para *benchmark*.

A métrica percentual mais frequente é o erro absoluto relativo médio (EARM) e é definida como

$$\text{EARM}(n)_t = \frac{\sum_{i=t-n+1}^t |r_i|}{n}$$

A principal limitação desta métrica está relacionada com o método de *benchmark* para séries de procura intermitente. Nestas, ao utilizar método ingênuo o valor de E_t é frequentemente zero, tornando r_t indefinido.

Métricas escaladas

As métricas escaladas foram propostas para ultrapassar os problemas de outras métricas, escalando os erros com base no EAM obtido através da aplicação do método ingênuo à amostra da série temporal. Desta forma, o resultado torna-se independente da escala da série temporal. O erro escalado q_t é definido por

$$q_t = \frac{e_t}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=t-n+2}^t |y_i - y_{i-1}|}$$

Um erro escalado com valor absoluto menor do que 1 resulta de uma previsão melhor do que EAM da amostra calculado através do método ingênuo. Por outro lado, se é maior do que 1 a previsão foi pior do que EAM da amostra. O erro escalado absoluto médio (EEAM) é definido por

$$\text{EEAM}(n)_t = \frac{\sum_{i=t-n+1}^t |q_i|}{n}$$

2.3.3.2 Métricas de precisão da implicação

As medidas de erro de previsão relacionadas com o desempenho do inventário também podem ser aplicadas em cenários relacionados com a procura. Estes incluem:

- Nível de serviço do ciclo (α) - este valor mede a probabilidade de ocorrer rotura durante o reaprovisionamento, sendo a reposição feita com base nos valores da previsão.
- Taxa de penúria (r) - este valor mede a quantidade da procura total não satisfeita imediatamente pelo inventário.
- Períodos em inventário (PeS) - este valor mede o número total de períodos que uma unidade de um item previsto existe ou está falta no inventário. A ideia do PeS pressupõe a existência de um inventário "fictício", ao qual é adicionado em cada período a valor da previsão, e são retiradas as unidades entregues. Uma boa previsão resulta num valor pequeno do PeS. Um valor positivo implica que algum inventário é deixado, enquanto um número negativo implica penúria acumulada. O PeS é definido por

$$PeS(n)_t = - \sum_{i=t-n+1}^t \sum_{j=t-n+1}^i (y_j - F_j)$$

Exemplo numérico

A tabela 2.3 apresenta o cálculo das métricas para uma série temporal com 10 períodos.

Tabela 2.3 Ilustração do cálculo das métricas

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total	Média
y_t	96	90	104	108	90	97	105	96	106	96		
$F_{t-1,t}$	97	96	97	98	97	97	98	98	99	99		
e_t	-1	-6	7	10	-7	0	7	-2	7	-3	12	1.20
$ e_t $	1	6	7	10	7	0	7	2	7	3	50	5.00
$(e_t)^2$	1	36	49	100	49	0	49	4	49	9	346	34.60
$ p_t $	1.0	6.7	6.7	9.3	7.8	0.0	6.7	2.1	6.6	3.1	50.0	5.00
Benchmark	97	96	90	104	108	90	97	105	96	106		
$F_{t-1,t}$												
E_t	-1	-6	14	4	-18	7	8	-9	10	-10		
$ r_t $	1.0	1.0	0.5	2.5	0.4	0.0	0.9	0.2	0.7	0.3	7.5	0.75
$ y_t - y_{t-1} $		6.0	14.0	4.0	18.0	7.0	8.0	9.0	10.0	10.0	86.0	9.56
$ q_t $		0.63	0.73	1.05	0.73	0.00	0.73	0.21	0.73	0.31	5.1	0.57
$-\sum_{i=1}^t (y_i - F_i)$	1	7	0	-10	-3	-3	-10	-8	-15	-12	-53	

2.3.4 Parametrização e seleção de modelos

Determinar os parâmetros de um modelo e selecionar a partir de um conjunto um modelo, requer que sejam conhecidos o propósito da previsão, o critério ou critérios de desempenho e o horizonte temporal de previsão relevante.

Na parametrização o objetivo é obter um modelo que tenha capacidade de generalizar o seu desempenho. Esta necessidade de generalização resulta do facto dos parâmetros do modelo serem determinados a partir de uma amostra e esta apresentar desvios causados por fatores aleatórios. A existência destes fatores pode conduzir a um sobre-ajuste (*overfitting*) do modelo aos dados que ao modelar o erro como um componente do modelo, torna-o ineficaz para prever novos resultados.

Outro problema que pode ocorrer é o sub-ajuste (*underfitting*) do modelo. Este ocorre quando o modelo de previsão subjacente não representa adequadamente a estrutura da série temporal.

A figura 2.11 ilustra fenómenos de sub-ajuste e sobre-ajuste assim como a relação com o viés e a variância.

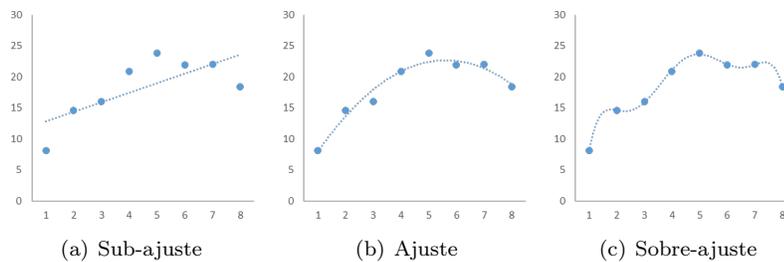


Figura 2.11 Relações de ajuste

O problema de sub-ajuste é ilustrado em (a). Aqui, o ajuste aos dados é feito através de uma função linear. Analisando o gráfico conclui-se não ser um bom modelo, pois os dados aparentam evoluir ao longo de um função quadrática. Este modelo apresenta o maior erro médio e um elevado viés. Em (b) o ajuste é feito por uma função quadrática, resultando num erro médio moderado. Em (c) é ilustrado o problema de sobre-ajuste. Aqui o ajuste é realizado por um polinómio de grau 6 que passa por todos os pontos da série temporal. Neste modelo o erro médio é próximo de zero e apresenta uma elevada variância. Apesar do elevado ajuste aos dados obtido em (c) este não parece ser um modelo adequado para realizar previsões. Neste exemplo é o modelo em (b) que apresenta um ajuste mais adequado para realizar previsões.

A diminuição da ocorrência de problemas de sobre-ajuste pode ser feita recorrendo a duas abordagens: regularização e validação. A regularização con-

siste em penalizar o erro dentro da amostra (resíduo) por um termo *overfit penalty* que representa uma estimativa do otimismo ou a polarização do erro dentro da amostra em relação ao erro fora da amostra. A validação, por outro lado, calcula diretamente os erros fora da amostra, utilizando métodos de reamostragem.

A prática mais comum de validação é dividir os dados históricos da série temporal (amostra) em dois sub-conjuntos, o dos dados de treino (ajuste) e o dos dados de teste, em que os dados de treino são utilizados para estimar os parâmetros do método de previsão e os dados de teste são utilizados para avaliar o seu desempenho. Uma vez que os dados de teste não são utilizados na determinação dos parâmetros, fornecem uma indicação fiável do desempenho do método.

As dimensões dos conjuntos de treino e teste correspondem habitualmente a 80% e 20% respetivamente, dos dados observados. É no entanto importante referir que este valor depende da dimensão da amostra, do horizonte da previsão e da periodicidade de realização das previsões.

2.3.5 Controlo do modelo

As métricas descritas em 2.3.3 ajudam a parametrizar e selecionar o melhor modelo de previsão a aplicar num cenário específico. No entanto, estas métricas não oferecem informações imediatas sobre se a abordagem de previsão continua ou não a ser aplicável depois de ser utilizada frequentemente em novas observações, i.e, se as previsões efetuadas por um determinado método de previsão passam a ser afetadas por erros não aleatórios.

O total de erros de previsão pode ser utilizado para avaliar o potencial enviesamento que a aplicação de um determinado método de previsão introduz. O enviesamento pode ser iterativamente representado, para todos os m instantes de tempo por

$$Viés_t = \sum_{i=1}^t e_i$$

Para que as previsões não sejam enviesadas, o ideal é que o $Viés$ varie em torno de zero. Embora o enviesamento seja ilustrativo do desempenho global de um método de previsão, nem sempre conduz a uma intervenção externa.

Muitas vezes, um ponto de referência é fornecido empregando o sinal de rastreio (*tracking signal*) que escala o viés pelo erro absoluto médio correspondente. O *tracking signal* no instante t é dado por

$$TS_t = \frac{Viés_t}{EAM(n)_t}$$

onde n representa o número observações consideradas no cálculo do *Viés*.

O *tracking signal* pode ser integrado com qualquer método de previsão, para monitorizar de forma automática se o processo está sob controlo ou se necessita de uma intervenção externa.

O *tracking signal* deve passar um teste de limites para ser significativo. Se o *tracking signal* for superior a 3,75, existe uma sub-previsão persistente. Por outro lado, se for inferior a -3,75, existe uma sobre-previsão persistente.

Assim, se $|TS| > 3,75$, i.e., se $TS < -3,75$ ou $TS > 3,75$ implica um enviesamento da previsão.

O valor de 3,75 é uma aproximação que utiliza a relação entre um erro de previsão normalmente distribuído e o erro absoluto médio. Em geral, $\sqrt{EQM} \times 0,8 = EAM$. Um nível de confiança de 99%, corresponde a utilizar um nível 3σ . Como medida do EAM, isto traduz-se em 3,75 EAM, pelo que 3,75 é o limite para o *TS*.

Exemplo numérico

A Figura 2.12 apresenta uma folha de cálculo, em que na coluna B são indicados os valores observados (y_t) de uma série temporal, ao longo de 12 períodos de tempo e o respetivo cálculo do *Tracking Signal*. Na Figura 2.13 é ilustrada a representação gráfica da evolução do *Tracking Signal* com os respetivos limites.

	A	B	C	D	E	F	G
1	t	y_t	F_t	e_t	$ e_t $	TS_t	
2	1	72	71.49	0.51	0.51	1.00	
3	2	116	115.66	0.34	0.34	2.00	
4	3	136	138.58	-2.58	2.58	-1.51	
5	4	96	95.40	0.60	0.60	-1.12	
6	5	77	76.59	0.41	0.41	-0.80	
7	6	123	123.37	-0.37	0.37	-1.35	
8	7	146	146.19	-0.19	0.19	-1.78	
9	8	101	102.45	-1.45	1.45	-3.37	
10	9	81	80.45	0.55	0.55	-2.78	
11	10	131	129.05	1.95	1.95	-0.24	
12	11	158	155.41	2.59	2.59	2.26	
13	12	109	111.15	-2.15	2.15	0.20	
14							
15							
	Célula	Fórmula				Copiar para	
	D2	=B2-C2				D3:D13	
	E2	=ABS(D2)				E3:E13	
	F2	=SOMA(\$D\$2:D2)/MÉDIA(\$E\$2:E2)				F3:F13	

Figura 2.12 Cálculo do *Tracking Signal*

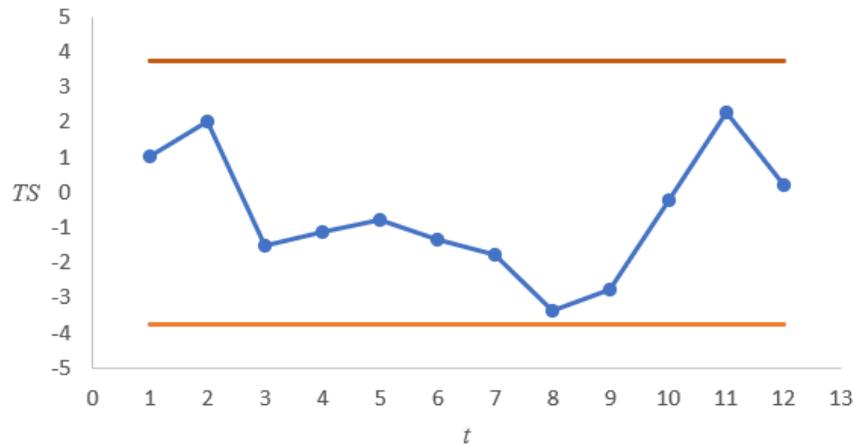


Figura 2.13 Evolução do TS

2.4 Tratamento de anomalias nos dados

Os valores atípicos (outliers) são observações muito distintas da maioria das observações de uma série cronológica. Podem ser erros ou simplesmente ser valores incomuns. Apesar de alguns valores incomuns possam corresponder a situações reais de procura excepcional, não significa que não devam ser removidos ou amortecidos. Por exemplo, se esses valores forem devidos a ações de marketing que não seguem qualquer padrão, poderemos não querer que influenciem a previsão.

Nenhum dos métodos apresentados na secção 2.6 terá um bom desempenho se houver valores atípicos nos dados. Nesse caso, podemos desejar remover esses valores (valores em falta), ou substituí-los por uma estimativa que esteja em maior conformidade com a maior parte dos dados.

Substituir simplesmente os valores incomuns sem pensar na razão da sua ocorrência pode conduzir a resultados indesejados, já que, estes podem fornecer informações úteis sobre o processo que gerou os dados, as quais devem ser consideradas ao fazer previsões. No entanto, se assumirmos o pressuposto que os valores atípicos são erros ou que não ocorrerão no período de previsão, a sua substituição pode permitir obter melhores resultados na previsão.

Os outliers podem ser classificados como pontuais, coletivos ou contextuais. Um outlier pontual ocorre quando uma observação nos dados se desvia do resto da população. Os outliers coletivos, são grupos de observações, que

diferem da população e não seguem o padrão esperado. Por último, os outliers contextuais ocorrem quando uma observação é considerada um outlier com base numa condição ou contexto particular, como o desvio em relação a observações vizinhas.

Não existe um procedimento único para lidar com os outliers. Uma abordagem comum é eliminar esses pontos de dados e não os incluir na análise ou do desenvolvimento do modelo. Em alternativa, podemos substituir os valores incomuns utilizando técnicas como a imputação e a interpolação. Outros métodos, como o amortecimento dos dados, podem minimizar o impacto dos outliers. Neste livro, iremos tratar apenas alguns dos métodos mais usados de deteção de outliers.

2.4.1 Deteção de outliers

Técnica de Interquartile Range (IQR)

O IQR é a diferença entre o 3º quartil (ou o percentil 75 ou o quantil 0,75) e o 1º quartil (ou o percentil 25 ou o quantil 0,25) de uma série de dados. Se uma série tiver $2n$ ou $2n + 1$ observações, então

- Q_1 = mediana do conjunto de valores observados.
- Q_2 = mediana dos n menores valores observados.
- Q_3 = mediana dos n maiores valores observados.

Os limites superior e inferior são definidos da seguinte forma:

$$\text{Limite superior} = Q_3 + s \times \text{IQR}$$

$$\text{Limite inferior} = Q_1 - s \times \text{IQR}$$

Onde, $\text{IQR} = Q_3 - Q_1$, e s é o múltiplo de IQR que determina a largura do intervalo aceitável.

Quaisquer observações que estejam mais de $s \times \text{IQR}$ abaixo do Q_1 ou mais de $1,5 \times \text{IQR}$ acima do Q_3 são consideradas outliers. Habitualmente s toma o valor 1,5. Mas este valor depende da distribuição seguida pelos dados. Considerando uma distribuição normal das observações, quando s toma o valor 1,5, então, de acordo com o método IQR, significa que qualquer observação que se encontre para além de $2,7\sigma$ da média (μ), em qualquer direção, deve ser considerado como um outlier.

Técnica de Z-score

O Z-score é uma transformação comum para normalizar os dados, que padroniza os dados para serem centrados em torno de uma média zero e n desvios-padrão da média.

$$Z = (x - \mu)/\sigma$$

Em que x é um ponto dos dados (uma observação), μ é a média do conjunto de dados e σ é o desvio padrão do conjunto de dados. Assim, depois de os dados serem transformados utilizando o Z-score qualquer ponto de dados acima ou abaixo desse valor limite (em desvios-padrão) é considerado um outlier.

Por exemplo, o valor limite pode ser +2 e -2 desvios padrão da média. Qualquer ponto inferior a -2 ou superior a +2 desvios-padrão pode ser considerado um outlier. Por outras palavras, quanto mais longe um ponto estiver da média, maior será a probabilidade de ser um outlier.

O Z-score tem uma grande desvantagem devido ao facto de ser um método estatístico paramétrico, baseado na distribuição normal. Assim, no caso dos dados não seguirem uma distribuição normal, deve ser usada uma versão modificada do Z-score.

Z-score modificado

O Z-score modificado é uma transformação para normalizar dados que não seguem uma distribuição normal. A principal diferença entre o Z-score e o z-score modificado é que a média é substituída pela mediana.

$$Z \text{ modificado} = (0.6745 \times x - \mu)/\sigma$$

2.5 Padrões de comparação de desempenho (*benchmark*)

A utilização de padrões de comparação de desempenho de métodos de previsão permite estabelecer uma referência que terá de ser ultrapassada para demonstrar a utilidade de métodos mais avançados.

São apresentados quatro métodos de previsão simples como padrões de comparação de desempenho:

- Média
- Método Ingénuo
- Método Ingénuo Sazonal
- Método da Deriva (Drift)

Em certos casos, um destes métodos simples pode revelar-se a abordagem de previsão mais eficaz disponível. No entanto, em muitos casos, estes métodos são utilizados como termo de comparação e não como a escolha preferida. Se um outro método mais elaborado não demonstrar um desempenho superior em comparação com estes métodos simples, não devemos considerá-lo.

Média

No método da Média, utiliza simplesmente o valor médio de todas as observações históricas e utiliza-o para prever valores futuros. A expressão de cálculo do método da Média é a seguinte:

$$F_{t,t+h} = \frac{\sum_{t=1}^T y_t}{T}$$

A Figura 2.14 ilustra a aplicação do método da Média face às previsões obtidas por outro método ($F_{t,t+h}$) a uma série temporal.

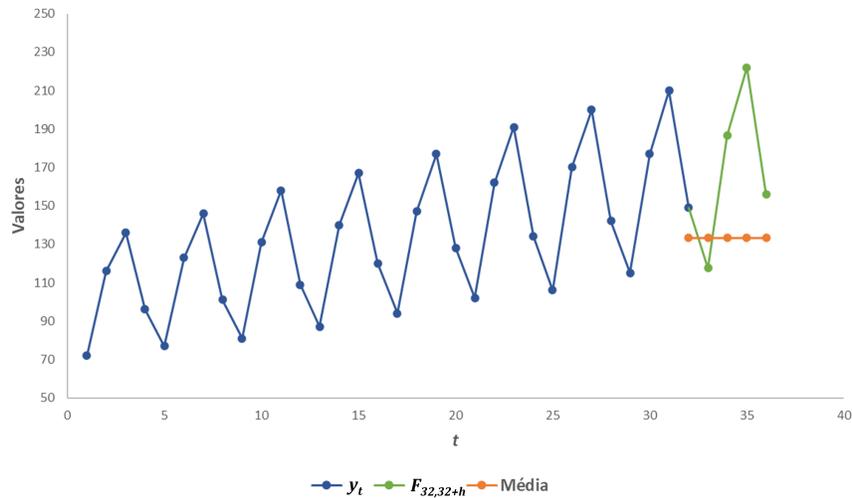


Figura 2.14 Previsões do método da Média

Método Ingénuo

O pressuposto seguido no Método Ingénuo é que a previsão para um qualquer período futuro é igual à última observação. O seu valor pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$F_{t,t+h} = y_t$$

A Figura 2.14 ilustra a aplicação do método ingénuo face às previsões obtidas por outro método ($F_{t,t+h}$) a uma série temporal.

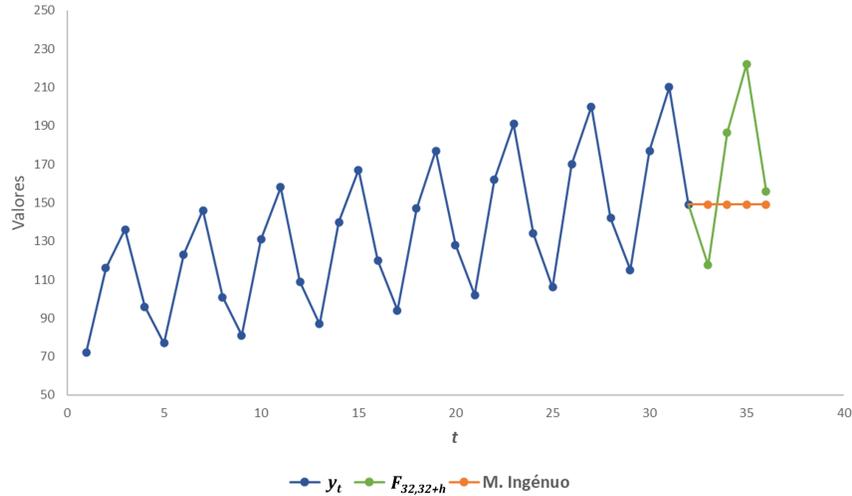


Figura 2.15 Previsões do método ingênuo

Método Ingênuo Sazonal

Para dados altamente sazonais, pode ser empregue um método semelhante. Nesta abordagem, cada previsão é definida como sendo igual ao último valor observado da estação correspondente (por exemplo, o mesmo mês do ano anterior). Formalmente, pode ser obtida através da seguinte expressão:

$$F_{t,t+h} = y_{t+h-m(k+1)}$$

em que m é igual ao comprimento da sazonalidade e k é a parte inteira de $(h - 1)/m$ (ou seja, o número de ciclos sazonais completos no período de previsão anterior ao período $t + h$).

A Figura 2.16 ilustra a aplicação do método ingênuo sazonal face às previsões obtidas por outro método ($F_{t,t+h}$) a uma série temporal.

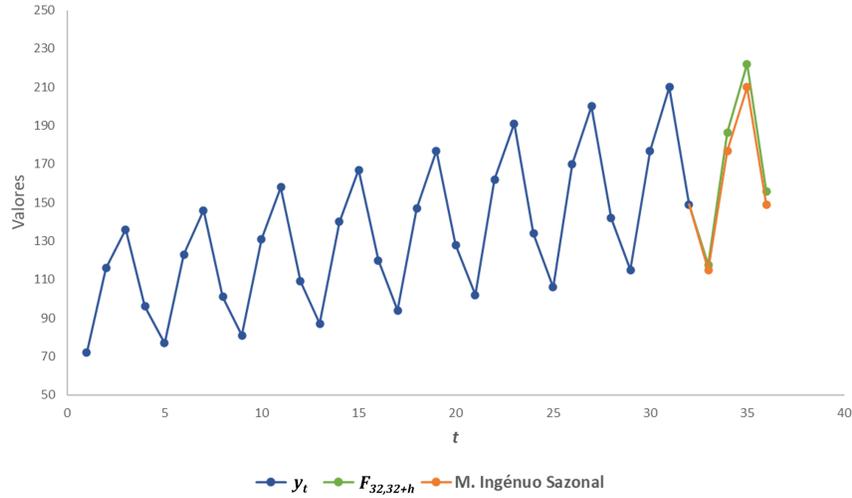


Figura 2.16 Previsões do método ingênuo sazonal

Método da Deriva (Drift)

Uma variação do método ingênuo consiste em permitir que as previsões se alterem gradualmente ao longo do tempo. O *drift* é definido como a alteração média registada em todas as observações. Esta alteração, pode ser obtida através da seguinte expressão:

$$F_{t,t+h} = y_t + \frac{h}{t-1} \sum_{i=2}^t (y_i - y_{i-1}) = y_t + h \left(\frac{y_t - y_1}{t-1} \right).$$

Isto é equivalente a traçar uma linha entre a primeira e a última observação e extrapolá-la para o futuro.

A Figura 2.17 ilustra a aplicação do método *drift* face às previsões obtidas por outro método ($F_{t,t+h}$) a uma série temporal.

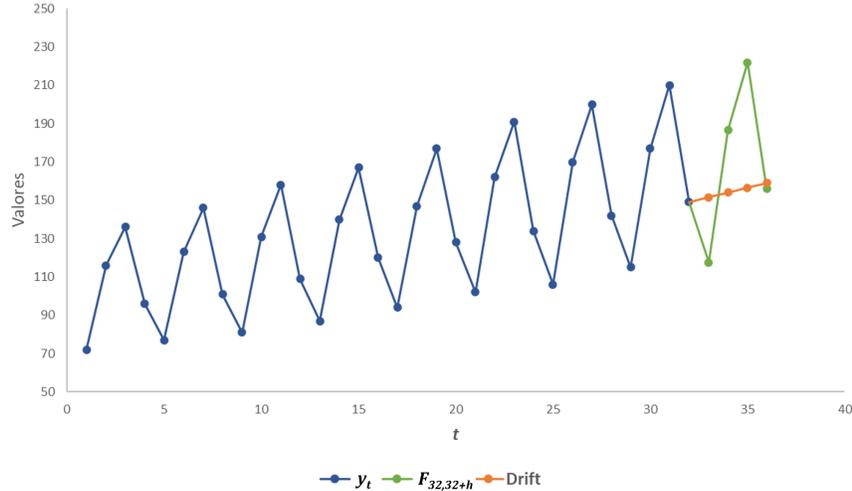


Figura 2.17 Previsões do método *drift*

2.6 Métodos de amortecimento

Os métodos de amortecimento são bastante populares para a realização de previsões de curto prazo, fruto da sua grande simplicidade conceptual, elevada eficiência computacional e qualidade das previsões.

O métodos de amortecimento apresentados nesta secção são:

- Média móvel simples (MMS)
- Amortecimento exponencial simples (AES)
- Amortecimento exponencial duplo (AED)
- Amortecimento exponencial triplo (AET)

O amortecimento exponencial foi proposto no final da década de 1950 (Holt, 1957; Brown, 1959; Winters, 1960) e tem inspirado alguns dos métodos de previsão de maior sucesso. As previsões produzidas utilizando métodos de amortecimento exponencial são médias ponderadas de observações passadas, com os pesos a decaírem exponencialmente à medida que as observações são mais antigas (Figura 2.18). Por outras palavras, quanto mais recente for a observação, maior será o peso associado. Esta estrutura gera previsões fiáveis rapidamente e para uma vasta gama de séries temporais, o que é uma grande vantagem e de grande importância para as aplicações nas empresas.

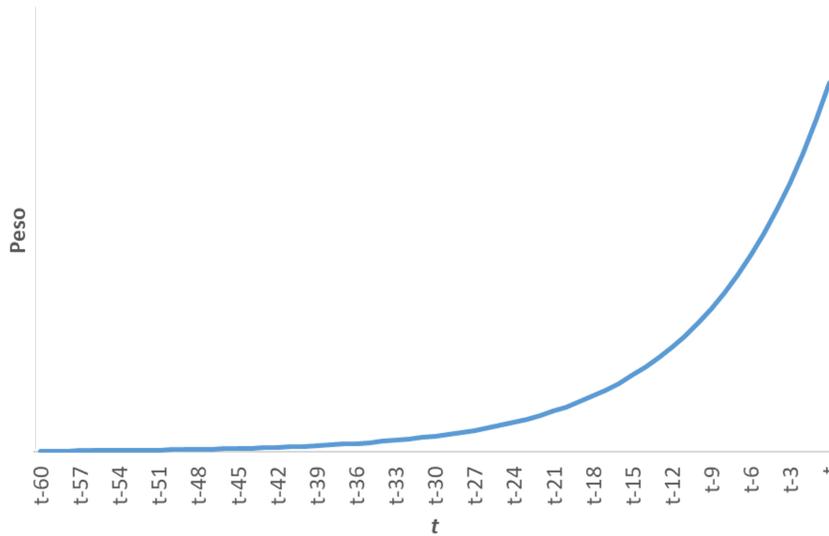


Figura 2.18 Evolução exponencial dos pesos

Média móvel simples

O método de média móvel usa os valores dos últimos n períodos, a fim de prever o valor para o período $(t + h)$.

O pressuposto do método de média móvel é que a previsão mais precisa para valores futuros é uma combinação simples (linear) de valores passados.

A escolha do comprimento n para um modelo de previsão de média móvel simples, deve ser revestido de algum cuidado. Normalmente valores maiores de n suavizam as séries cronológicas mais do que os valores mais pequenos, que são mais reativos. O valor de n pode ser determinado, verificando qual o valor que minimiza o *EQM* obtido a partir das observações e dos valores ajustados.

Os valores ajustados são dados por

$$f_{t,t+1} = MMS_t(n) = \frac{\sum_{i=t-n+1}^t y_i}{n}$$

Após a seleção do valor de n são determinadas as previsões. A previsão realizada no instante T para o instante $T + h$ é dada por

$$F_{T,T+h} = MMS_T(n) = \frac{\sum_{i=T-n+1}^T y_i}{n}$$

Exemplo numérico

A Figura 2.19 apresenta uma folha de cálculo, em que para os valores observados (y_t) de uma série temporal, ao longo de 20 períodos de tempo são calculados os ajustes utilizando três comprimentos de média móvel, 3, 5 e 7 respetivamente. Para cada valor de n são ainda calculados os erros quadráticos EQ_t e o EQM .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1				n=3				n=5				n=7	
2	t	y _t	MMS _t (3)	f _t	EQ _t		MMS _t (5)	f _t	EQ _t		MMS _t (7)	f _t	EQ _t
3	1	24											
4	2	17											
5	3	16	19,0										
6	4	8	13,7	19,0	121,0								
7	5	26	16,7	13,7	152,1	18,2							
8	6	10	14,7	16,7	44,4	15,4	18,2	67,2					
9	7	22	19,3	14,7	53,8	16,4	15,4	43,6	17,6				
10	8	14	15,3	19,3	28,4	16,0	16,4	5,8	16,1	17,6	12,8		
11	9	16	17,3	15,3	0,4	17,6	16,0	0,0	16,0	16,1	0,0		
12	10	24	18,0	17,3	44,4	17,2	17,6	41,0	17,1	16,0	64,0		
13	11	7	15,7	18,0	121,0	16,6	17,2	104,0	17,0	17,1	102,9		
14	12	25	18,7	15,7	87,1	17,2	16,6	70,6	16,9	17,0	64,0		
15	13	17	16,3	18,7	2,8	17,8	17,2	0,0	17,9	16,9	0,0		
16	14	26	22,7	16,3	93,4	19,8	17,8	67,2	18,4	17,9	66,3		
17	15	16	19,7	22,7	44,4	18,2	19,8	14,4	18,7	18,4	5,9		
18	16	28	23,3	19,7	69,4	22,4	18,2	96,0	20,4	18,7	86,2		
19	17	14	19,3	23,3	87,1	20,2	22,4	70,6	19,0	20,4	41,3		
20	18	16	19,3	19,3	11,1	20,0	20,2	17,6	20,3	19,0	9,0		
21	19	19	16,3	19,3	0,1	18,6	20,0	1,0	19,4	20,3	1,7		
22	20	11	15,3	16,3	28,4	17,6	18,6	57,8	18,6	19,4	71,0		
23		EQM			58,2			43,8			40,4		
	Célula	Fórmula										Copiar para	
	C3	=MÉDIA(\$B3:\$B5)										C5:C22	
	D4	=C5										D6:D22	
	E4	=(\$B6-D6)^2										E6:E22	

Figura 2.19 Cálculo da média móvel simples

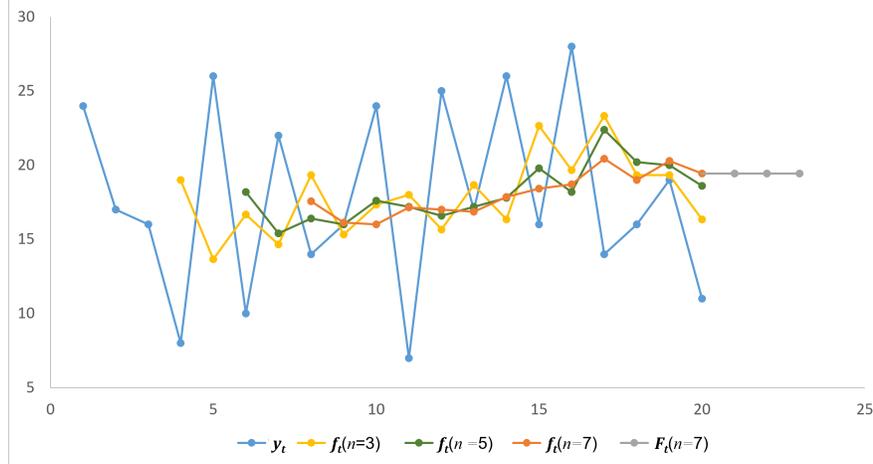


Figura 2.20 Evolução dos ajustes e das previsões

Na Figura 2.20 podem ser observados os ajustes para os diferentes valores de n e os valores da previsão obtido com $n = 7$.

Amortecimento exponencial simples

Nos métodos de amortecimento exponencial não é frequente estabelecer qualquer distinção entre as componentes tendência e ciclo. O que caracteriza em cada período t as duas componentes é o nível (l_t) e a tendência (b_t). O método mais simples de amortecimento exponencial é designado por amortecimento exponencial simples. Este método é adequado para a previsão de dados sem uma tendência clara, sazonalidade ou outros padrões subjacentes, i.e., apenas com uma componente de nível (l_t).

$$l_t = \alpha \cdot y_t + (1 - \alpha) l_{t-1} \quad (2.4)$$

$$(2.5)$$

onde $0 \leq \alpha \leq 1$ é o parâmetro de amortecimento que controla a taxa de crescimento exponencial dos pesos atribuídos a cada período. Geralmente α é pequeno para estabilidade das previsões (0,1 - 0,2).

À semelhança dos restantes métodos de amortecimento desta secção a aplicação do método de amortecimento exponencial requer a seleção de dois parâmetros, a constante de amortecimento α e os valores de inicialização da

série l_t . Todas as previsões podem ser calculadas a partir dos dados, uma vez conhecidos esses valores.

O valor da constante de amortecimento α pode ser determinada empiricamente, com base na experiência do analista e os valores iniciais obtidos a partir de regras de inicialização. No entanto, uma forma mais fiável e objetiva de obter valores para os parâmetros desconhecidos é estimá-los a partir das observações. A necessidade de arbitrar um valor inicial para o nível, resulta do facto da equação (2.4) ser recursiva.

O valor inicial de l_t pode ser estimado de forma simples através dos seguintes métodos de inicialização:

1^a variante:

$$l_1 = y_1$$

2^a variante:

$$l_k = \frac{\sum_{i=1}^k y_i}{k}$$

Os parâmetros desconhecidos de qualquer método de amortecimento exponencial podem ser estimados através da minimização da soma do erro quadrático médio. Isto envolve um problema de minimização não linear, pelo que é necessário utilizar uma ferramenta de otimização para o resolver, tal como, o Solver do Excel. A Figura 2.23 ilustra a aplicação do Solver para a determinação dos parâmetros α e l_1 .

O valor do ajuste para os períodos das observações utilizados na determinação dos parâmetros é dado por

$$f_{t,t+1} = l_t$$

Exemplo numérico

A Figura 2.21 apresenta uma folha de cálculo, em que para os valores observados (y_t) de uma série temporal, ao longo de 20 períodos de tempo, são calculados, considerando duas constante de amortecimento arbitradas ($\alpha = 0,1$ e $\alpha = 0,9$), os valores do nível para cada uma das observações, assim como os ajustes para os períodos $t = \{2, \dots, 20\}$. São ainda calculados os erros quadráticos EQ_t e o EQM .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			$\alpha =$	0,1			$\alpha =$	0,9	
2	t	y_t	l_t	f_t	EQ_t		l_t	f_t	EQ_t
3	1	24	24,0				24,0		
4	2	21	23,7	24,0	9,0		21,3	24,0	9,0
5	3	22	23,5	23,7	2,9		21,9	21,3	0,5
6	4	19	23,1	23,5	20,5		19,3	21,9	8,6
7	5	16	22,4	23,1	50,1		16,3	19,3	10,8
8	6	18	21,9	22,4	19,1		17,8	16,3	2,8
9	7	18	21,5	21,9	15,5		18,0	17,8	0,0
10	8	17	21,1	21,5	20,6		17,1	18,0	1,0
11	9	20	21,0	21,1	1,2		19,7	17,1	8,4
12	10	19	20,8	21,0	3,9		19,1	19,7	0,5
13	11	16	20,3	20,8	22,8		16,3	19,1	9,4
14	12	17	20,0	20,3	10,9		16,9	16,3	0,5
15	13	15	19,5	20,0	24,7		15,2	16,9	3,7
16	14	18	19,3	19,5	2,2		17,7	15,2	7,9
17	15	20	19,4	19,3	0,5		19,8	17,7	5,2
18	16	23	19,8	19,4	13,0		22,7	19,8	10,4
19	17	20	19,8	19,8	0,1		20,3	22,7	7,2
20	18	22	20,0	19,8	4,9		21,8	20,3	3,0
21	19	24	20,4	20,0	16,0		23,8	21,8	4,7
22	20	23	20,7	20,4	6,8		23,1	23,8	0,6
23		EQM			12,9				5,0
	Célula	Fórmula							Copiar para
	C4	=D\$1*\$B4+(1-D\$1)*C3							C5:C23
	D4	=C3							D5:D23
	E4	=(\$B4-D4)^2							E5:E23

Figura 2.21 Cálculo do amortecimento exponencial simples

A Figura 2.22 representa o ajuste para as duas séries de amortecimento ($\alpha = 0,1$ e $\alpha = 0,9$).

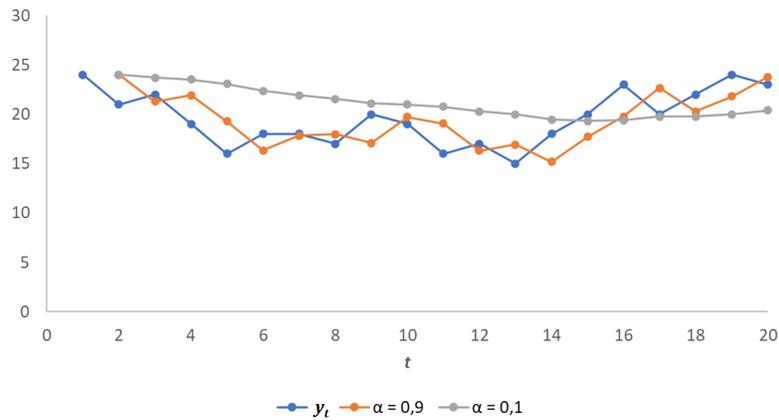


Figura 2.22 Ajuste para $\alpha = 0,1$ e $\alpha = 0,9$

Outra forma de calcular os parâmetros, é minimizar o EQM . A Figura 2.23 ilustra a utilização do Solver do Excel para determinar os valores de α e l_1 .

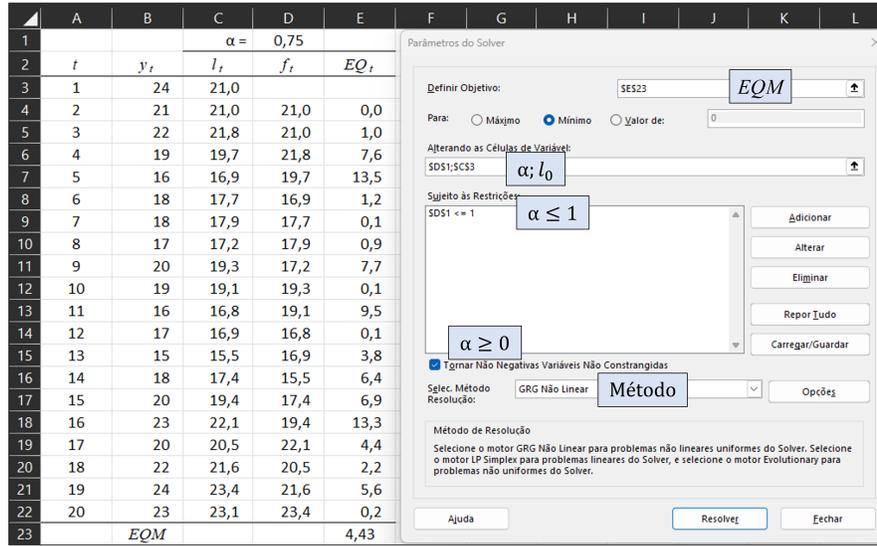


Figura 2.23 Determinação dos parâmetros do AES

Após a determinação da constante de amortecimento e dos valor de inicialização, a previsão a h passos é calculada utilizando a expressão

$$F_{T,T+h} = l_T$$

onde T é o período a partir do qual se pretende calcular a previsão, e que normalmente corresponde à última observação. No amortecimento exponencial simples todas as previsões a mais do que um passo são iguais.

Para o exemplo da Figura 2.23, $T = 20$ e as previsões para os períodos 21 e 22 são indicadas na Tabela 2.4.

Tabela 2.4 Previsões AES

t	h	$F_{20,t}$
21	1	23,1
22	2	23,1

2.6.1 Amortecimento exponencial duplo (Método de Holt)

Holt,(1957) estendeu o amortecimento exponencial simples para permitir a previsão de dados com tendência. Este método envolve duas equações de amortecimento (uma para o nível e outra para a tendência):

$$l_t = \alpha \cdot y_t + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b_{t-1})$$

$$b_t = \beta(l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1},$$

em que l_t representa uma estimativa do nível da série no período t , b_t representa uma estimativa da tendência (declive) da série no período t , α é o parâmetro de amortecimento para o nível, onde $0 \leq \alpha \leq 1$, e β é o parâmetro de amortecimento para a tendência, onde $0 \leq \beta \leq 1$.

Os valores iniciais de l_t e b_t podem ser estimados de forma simples através dos seguintes métodos de inicialização:

1ª variante:

$$l_1 = y_1$$

$$b_1 = y_2 - y_1$$

2ª variante: Ajustar uma regressão linear simples às primeiras 3 a 5 observações.

$$y_t = a + b \cdot t$$

$$l_1 = a$$

$$b_1 = b$$

Após a determinação de α , β , l_t e b_t iniciais, o ajuste é calculado utilizando a expressão

$$f_{t,t+1} = l_t + b_t.$$

Exemplo numérico

A Figura 2.24 apresenta uma folha de cálculo, em que para os valores observados (y_t) de uma série temporal, ao longo de 20 períodos de tempo são calculadas considerando duas constante de amortecimento ($\alpha = 0,03$ e $\beta = 1$) os valores do nível e tendência para cada uma das observações, assim como as previsões a um passo para os períodos $t = \{1, \dots, 20\}$. São ainda calculados os erros quadráticos EQ_t e o EQM e as previsões para os períodos 21 a 24.

	A	B	C	D	E	F
1			0,03	1,00		
2	t	y_t	l_t	b_t	f_t	EQ
3	1	24	22,69	0,00		
4	2	21	22,64	-0,06	22,69	2,87
5	3	22	22,56	-0,08	22,58	0,33
6	4	24	22,53	-0,03	22,48	2,31
7	5	24	22,56	0,03	22,51	2,23
8	6	22	22,56	0,01	22,58	0,34
9	7	22	22,55	-0,01	22,57	0,32
10	8	21	22,48	-0,07	22,54	2,36
11	9	22	22,40	-0,08	22,42	0,17
12	10	22	22,31	-0,09	22,32	0,10
13	11	21	22,18	-0,13	22,22	1,48
14	12	22	22,04	-0,14	22,04	0,00
15	13	23	21,94	-0,10	21,90	1,20
16	14	21	21,82	-0,13	21,84	0,71
17	15	22	21,70	-0,12	21,69	0,10
18	16	23	21,63	-0,07	21,58	2,01
19	17	21	21,55	-0,09	21,56	0,32
20	18	20	21,41	-0,14	21,46	2,13
21	19	21	21,26	-0,15	21,27	0,07
22	20	21	21,11	-0,15	21,12	0,01
23					EQM	1,00
	Célula	Fórmula				Copiar para
	C4	= \$C\$1*B4+(1-\$C\$1)*(C3+D3)				C5:C23
	D4	= \$D\$1*(C4-C3)+(1-\$D\$1)*D3				D5:D23
	E4	=C3+D3				E5:E23

Figura 2.24 Cálculo do amortecimento exponencial duplo

Tal como já foi referido, Os parâmetros desconhecidos, $\{l_t, b_t, \alpha, \beta\}$ podem ser estimados através da minimização do erro quadrático médio. A Figura 2.25 apresenta o menu do solver do Excel utilizado na determinação dos parâmetros, para o exemplo da Figura 2.24.

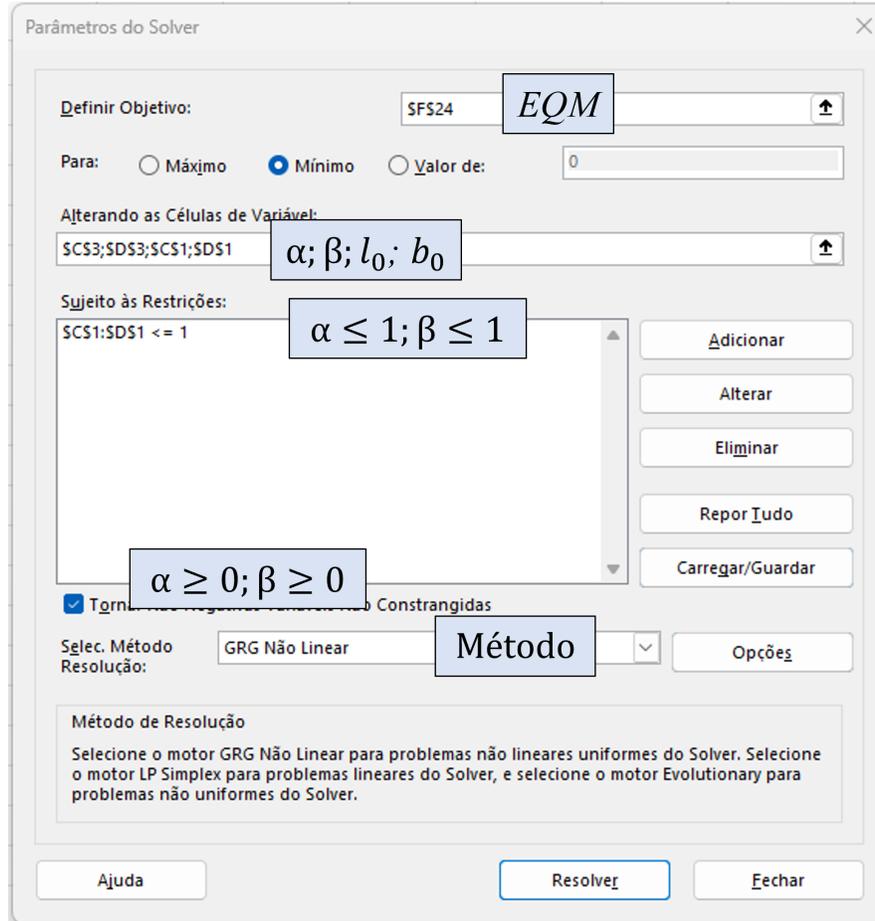


Figura 2.25 Menu Solver para cálculo dos parâmetros do AED

A previsão para h períodos futuros é igual ao último nível estimado mais h vezes o último valor de tendência estimado. Assim, as previsões são uma função linear de h . As previsões são calculadas pela expressão

$$F_{T,T+h} = l_T + h \cdot b_T$$

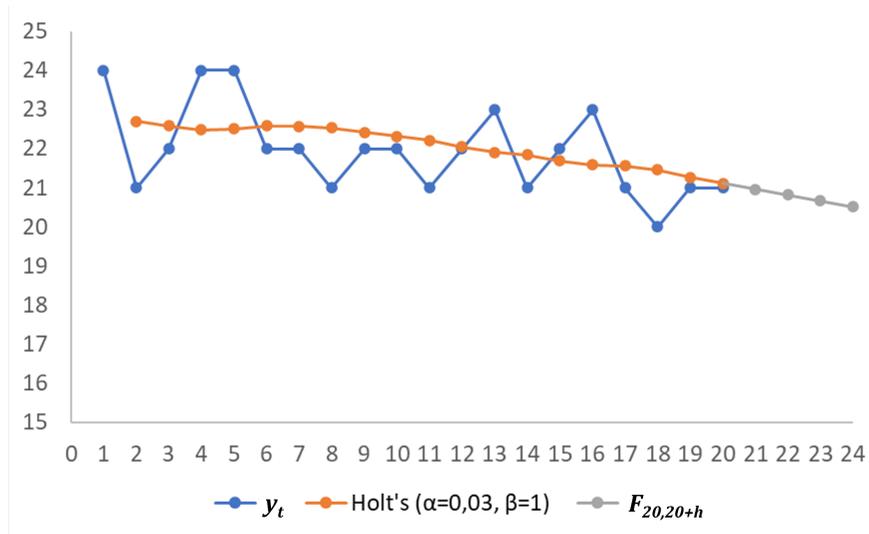
onde T é o período a partir do qual se pretende calcular a previsão, e que normalmente corresponde à última observação.

Para o exemplo da Figura 2.26, $T = 20$ e as previsões para os períodos 21 a 22 são indicadas na Tabela 2.5.

Tabela 2.5 Previsões AED

t	h	$F_{20,t}$
21	1	20,93
22	2	20,79
23	3	20,66
24	4	20,52

A Figura 2.26 representa a série de amortecimento exponencial e a previsão para os períodos 21 a 24 ($\alpha = 0,03$ e $\beta = 1$).

**Figura 2.26** Previsões AED

2.6.2 Amortecimento Exponencial Triplo (Método de Holt-Winters)

O método de Holt-Winters é uma extensão do método de Holt para incluir a componente de sazonalidade. A abordagem de Holt-Winters baseia-se em três equações de amortecimento. Estas equações são responsáveis pela estimativa do nível l_t , da tendência b_t e da sazonalidade s_t . Cada uma das equações tem associada um parâmetro de amortecimento, sendo estes α , β e γ , respetivamente.

Os padrões sazonais ocorrem sempre com periodicidade regular. No entanto a magnitude do padrão sazonal das observações influencia a forma como a sazonalidade é modelada. Quando a magnitude das variações sazonais per-

manece constante, o comportamento da sazonalidade é aditivo. Quando a magnitude das variações sazonais aumentam à medida que os valores das observações aumentam ou diminuem, o comportamento da sazonalidade é multiplicativo. A Figura 2.27 ilustra a diferença entre as sazonalidades aditiva e multiplicativa.

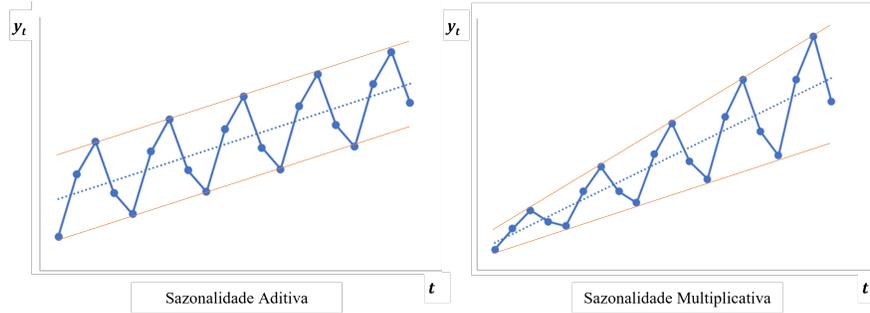


Figura 2.27 Comparação entre sazonalidade aditiva e multiplicativa

Método de Holt-Winters tem duas variantes relacionadas com o tipo de sazonalidade, o método aditivo eo método multiplicativo.

2.6.2.1 Método Aditivo

As equações das componentes do nível l_t , da tendência b_t e da sazonalidade s_t para o método de Holt-Winters aditivo são as seguintes:

$$\begin{aligned} l_t &= \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t &= \beta(l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1} \\ s_t &= \gamma(y_t - l_{t-1} - b_{t-1}) + (1 - \gamma)s_{t-m}, \end{aligned}$$

Onde m representa o comprimento da sazonalidade, isto é, o número de estações no padrão sazonal. Por exemplo, uma sazonalidade de padrão anual corresponde a $m = 12$ para dados mensais, $m = 4$ para dados trimestrais, e $m = 2$ para dados semestrais.

A componente da sazonalidade s_t , representa uma estimativa da sazonalidade no período t e é expressa em termos absolutos na escala da série observada. Em cada ciclo de sazonalidade, a soma da componente sazonal será aproximadamente igual a zero. A constante de amortecimento para o nível é $0 \leq \alpha \leq 1$, para a tendência é $0 \leq \beta \leq 1$, e para a sazonalidade $0 \leq \gamma \leq 1$.

A inicialização é feita utilizando as seguintes equações

$$\begin{aligned}
l_m &= (y_1 + \dots + y_m) / m \\
b_m &= [(y_{m+1} + \dots + y_{m+m}) - (y_1 + \dots + y_m)] / m^2 \\
s_i &= y_i - l_m, \quad i = 1, \dots, m
\end{aligned}$$

onde o nível é a média do primeiro ciclo de sazonalidade e o declive a média dos declives para cada período nos dois primeiros ciclos.

A equação de ajuste fornece os valores ajustados aos dados de treino.

$$f_{t,t+1} = l_t + b_t + s_{t-m}$$

A previsão a h passos é igual à soma do último nível estimado, mais h vezes o último valor de tendência estimado, mais o índice de sazonalidade estimada s_t da última estação comum à estação de $T + h$.

$$F_{T,T+h} = l_T + h.b_T + s_{T-m+h_m^+}$$

onde h_m^+ é dado por

$$h_m^+ = \lfloor (h - 1) \bmod m \rfloor + 1$$

o que assegura que as estimativas dos índices sazonais usados na previsão são do último ciclo sazonal.

2.6.2.2 Método Multiplicativo

As equações das componentes do nível l_t , da tendência b_t e da sazonalidade s_t para o método de Holt-Winters multiplicativo são as seguintes:

$$\begin{aligned}
l_t &= \alpha \frac{y_t}{s_{t-m}} + (1 - \alpha) \frac{l_{t-1}}{b_{t-1}} \\
b_t &= \beta (l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta) b_{t-1} \\
s_t &= \gamma \frac{y_t}{l_{t-1} - b_{t-1}} + (1 - \gamma) s_{t-m},
\end{aligned}$$

onde m representa o comprimento da sazonalidade. A componente sazonal é expressa em termos relativos (percentagens), e na equação de nível, a série é ajustada sazonalmente dividindo-a pela componente sazonal. Em cada ciclo de sazonalidade, a soma da componente sazonal será aproximadamente igual a m . A constante de amortecimento para o nível é $0 \leq \alpha \leq 1$, para a tendência é $0 \leq \beta \leq 1$, e para a sazonalidade $0 \leq \gamma \leq 1$.

A inicialização é feita utilizando as seguintes equações

$$l_m = (y_1 + \dots + y_m) / m$$

$$b_m = [(y_{m+1} + \dots + y_{m+m}) - (y_1 + \dots + y_m)] / m^2$$

$$s_i = y_i / l_m, \quad i = 1, \dots, m$$

onde o nível é a média do primeiro ciclo de sazonalidade e o declive a média dos declives para cada período nos dois primeiros ciclos.

A equação de ajuste fornece os valores ajustados aos dados de treino.

$$f_{t,t+1} = (l_t + b_t) s_{t-m}$$

Exemplo numérico

A Figura 2.28 apresenta uma folha de cálculo com os valores da procura trimestral (y_t) de um artigo ao longo de 6 anos e ilustra o cálculo do ajuste através do método multiplicativo.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				α	β	γ		
2				0,40	0,10	0,05		
3	t	Qt	y_t	l_t	b_t	s_t	f_t	EQ_t
4	1	T1	72			0,7		
5	2	T2	116			1,1		
6	3	T3	136			1,3		
7	4	T4	96	105,0	1,7	0,9		
8	5	T1	77	108,9	1,9	0,7	73,2	14,8
9	6	T2	123	111,0	1,9	1,1	122,5	0,3
10	7	T3	146	112,9	1,9	1,3	146,3	0,1
11	8	T4	101	113,1	1,7	0,9	105,0	15,6
12	9	T1	81	116,0	1,9	0,7	78,9	4,3
13	10	T2	131	118,1	1,9	1,1	130,3	0,5
14	11	T3	158	120,8	2,0	1,3	155,5	6,4
15	12	T4	109	121,5	1,8	0,9	112,1	9,4
16	13	T1	87	124,5	2,0	0,7	84,9	4,5
17	14	T2	140	126,6	2,0	1,1	139,8	0,0
18	15	T3	167	128,7	2,0	1,3	166,6	0,2
19	16	T4	120	131,1	2,0	0,9	119,1	0,9
20	17	T1	94	134,4	2,2	0,7	91,7	5,2
21	18	T2	147	135,1	2,0	1,1	150,9	15,6
22	19	T3	177	136,9	2,0	1,3	177,8	0,6
23	20	T4	128	139,5	2,0	0,9	126,6	1,9
24	21	T1	102	144,0	2,3	0,7	97,7	18,6
25	22	T2	162	146,5	2,3	1,1	161,6	0,2
26	23	T3	191	148,2	2,3	1,3	192,9	3,5
27	24	T4	134	149,1	2,1	0,9	137,3	10,8
28							EQM	5,7
	Célula	Fórmula						Copiar para
	D7	=MÉDIA(C4:C7)						C5:C23
	E7	=(SOMA(C8:C11)-SOMA(C4:C7))/4^2						D5:D23
	F4	=C4/\$D\$7						F5:F7
	D8	=\$D\$2*C8/F4+(1-\$D\$2)*(D7+E7)						D9:D27
	E8	=\$E\$2*(D8-D7)+(1-\$E\$2)*E7						E9:E27
	F8	=\$F\$2*C8/(D7+E7)+(1-\$F\$2)*F4						F9:F27

Figura 2.28 Cálculo do amortecimento exponencial triplo

A previsão a h passos é igual à soma do último nível estimado, mais h vezes o último valor de tendência estimado, multiplicada pelo índice de sazonalidade estimado s_t da última estação comum à estação de $T + h$.

$$F_{T,T+h} = (l_T + h.b_T)s_{T-m+h_m^+}$$

onde h_m^+ é dado por

$$h_m^+ = \lfloor (h - 1) \bmod m \rfloor + 1$$

o que assegura que as estimativas dos índices sazonais usados na previsão são os do último ciclo sazonal.

Para o exemplo da Figura 2.28, para $T = 24$ as previsões para os períodos 25 a 28 são indicadas na Tabela 2.6.

Tabela 2.6 Previsões AED

t	h	$F_{24,t}$
25	1	104.6
26	2	169.2
27	3	201.3
28	4	143.5

A Figura 2.29 representa a série de amortecimento exponencial e a previsão para os períodos 25 a 28 ($\alpha = 0,4$ e $\beta = 0,1$ e $\gamma = 0,05$).

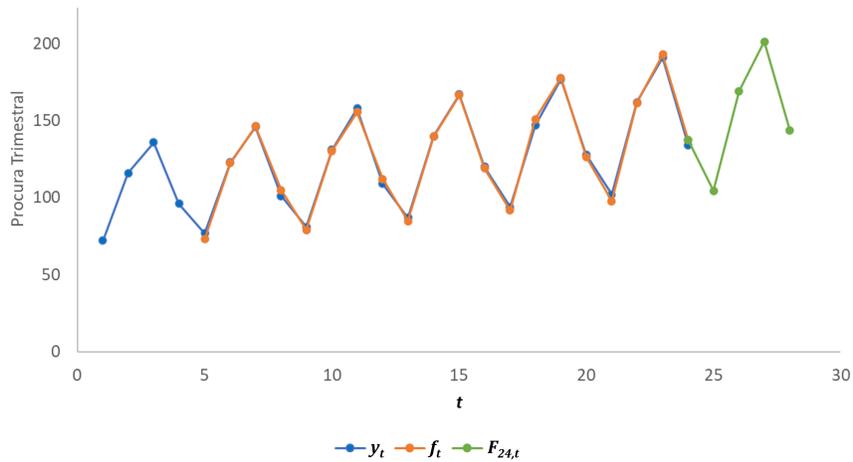


Figura 2.29 Previsões AET multiplicativo

2.7 Sobre a utilização do Solver do Excel

A determinação dos parâmetros dos métodos de amortecimento é problema de minimização não linear (PNL), pelo que é necessário utilizar uma ferramenta de otimização para o resolver, tal como, o Solver do Excel.

A ferramenta Solver do Excel utiliza vários algoritmos para encontrar soluções ótimas para problemas de Programação Não Linear (PNL):

- O método do Gradiente Reduzido Generalizado (GRG2)(Lasdon, Fox e Ratner, 1974)
- O método Evolutionary para otimização de funções não suaves (non-smooth) que utiliza uma variedade de algoritmos genéticos e métodos de pesquisa local.

As funções descontínuas causam uma dificuldade considerável e as funções não suaves causam alguma dificuldade para o método de resolução GRG Não Linear. A função descontínua mais comum no Excel é a função IF em que o teste condicional depende das variáveis de decisão, como no exemplo =IF(C1>10,D1,2*D1) em que C1 é uma variável. Exemplos de funções descontínuas comuns do Excel incluem as funções IF, CHOOSE, LOOKUP, HLOOKUP, VLOOKUP, COUNT, INT, ROUND, CEILING, FLOOR. Exemplos de funções não suaves são ABS, MIN, MAX.

Alguns modelos só podem ser expressos com a ajuda destas funções; noutros casos, o utilizador tem um certo grau de escolha na forma como modela o problema do mundo real e quais as funções que utiliza.

O método de Resolução Evolutionary pode lidar com estas funções, mas tem um custo em tempo e qualidade de solução. Por outro lado, muitas vezes obriga a definir os limites inferiores e superiores das variáveis de decisão, na forma de restrições. Uma das estratégias poderá passar por usar primeiro o método GRG Não Linear e a solução obtida ser a solução inicial do método Evolutionary.

Algumas notas importantes sobre a utilização do Solver do Excel:

- Para o método GRG Não Linear, ativar a opção Multistart
- Por vezes, o Solver tem dificuldade em resolver problemas PNL se começar na solução nula, onde todas as variáveis de decisão (parâmetros do modelo) são definidas como zero. Portanto, ao resolver um problema de PNL, sempre que possível, é melhor especificar uma solução inicial não nula.
- Na resolução de um problema de PNL, o Solver normalmente pára, quando o primeiro de três testes é satisfeito, resultando numa das 3 mensagens seguintes:
 - *O Solver convergiu em probabilidade para uma solução global.*
 - *O Solver encontrou uma solução. Todas as restrições e condições de otimização foram satisfeitas.* Significa que o Solver encontrou uma

- solução ótima local, mas não garante que a solução seja a ótima global.
- *O Solver não consegue melhorar a solução atual. Todas as restrições foram satisfeitas.* Significa que o Solver entrou em ciclo gerando soluções degeneradas. Normalmente, este problema pode ser resolvido eliminando restrições redundantes do PNL.
 - Para séries de pequena dimensão utilizar as variantes para calcular os valores de inicialização e usar o solver para calcular as constantes de amortecimento

2.8 A procura intermitente

A procura intermitente (também conhecida como procura esporádica) acontece quando um produto experimenta vários períodos de procura zero. Muitas vezes, nessas situações, quando a procura ocorre é pequena, e às vezes muito variável em dimensão. A procura intermitente é muitas vezes verificada em indústrias como a aviação, automóvel, de defesa e de manufatura, e ocorre geralmente com produtos que se encontram no fim de seu ciclo de vida. Algumas empresas que operam nestes setores observam uma procura intermitente em mais de metade dos produtos nos seus inventários. Em tais situações, há um claro incentivo financeiro para controlar e manter níveis adequados de inventário, tornando-se portanto, necessário prever a procura para esses itens.

Os diversos valores zero séries temporais de procura intermitente tornam os métodos de previsão habituais difíceis de aplicar. Por exemplo, o amortecimento exponencial simples (AES), é conhecido por ter um mau desempenho na previsão de procura intermitente, uma vez que existe um enviesamento positivo da previsão no período logo após uma procura não-zero.

Este subcapítulo explora alguns dos métodos desenvolvidos especificamente para séries temporais de procura intermitente, e algumas métricas de erro usados para os avaliar.

2.8.1 Método de Croston

O primeiro método desenvolvido especificamente para séries temporais de procura intermitente foi proposto por J. D. Croston, 1972, que parte do pressuposto que é mais intuitivo e preciso estimar a probabilidade de procura separando o tamanho do intervalo entre procuras não-zero e a dimensão da procura.

Neste método, é considerado que a dimensão da procura não-zero, z é normalmente distribuída com $N(\mu, \sigma^2)$, e a procura (A) é aleatória e tem

uma probabilidade de Bernoulli $1/p$ de ocorrer em cada período de revisão (desta forma a procura entre intervalos, segue uma distribuição geométrica com média p).

O modelo subjacente assumido tem a forma

$$A_t = x_t(z_{n-1} + e_n)$$

onde o índice t representa o período de revisão, o índice n as procuras não-zero e x_t tem uma distribuição de Bernoulli

$$x_t = \begin{cases} 1, & \text{prob}(1/p) \\ 0, & \text{prob}(1 - 1/p), \end{cases}$$

$$E[(x_i - 1/p)(x_j - 1/p)] = 0 \forall 1, j, i \neq j$$

A implementação do método de Croston envolve previsões separadas em duas novas séries de amortecimento exponencial simples. Seja z a procura não-zero e v o tamanho do intervalo médio entre procuras não-zero, construídas a partir da série temporal original, observando quais os períodos de tempo contêm valores zero e quais períodos contêm valores não-zero. Como o método geralmente é aplicado a séries temporais de procura de itens, z geralmente é chamado de "procura" e v "tempo entre procuras".

Seja z_n a n -ésima quantidade não-zero da procura, e seja v_n o tempo entre v_{n-1} e v_n . Se \hat{z}_{n+1} e \hat{v}_{n+1} são as previsões a um passo ($n+1$) da procura e do tempo entre as chegadas, respetivamente, com base nos dados até à procura n , então

$$\begin{aligned} \hat{z}_{n+1} &= \alpha z_n + (1 - \alpha) \hat{z}_n \\ \hat{v}_{n+1} &= \alpha v_n + (1 - \alpha) \hat{v}_n \end{aligned}$$

A constante de amortecimento α toma valores entre 0 e 1, e é assumido como tendo o mesmo valor em ambas as equações. Seja k a última observação positiva da procura, então, a previsão a h -passos para a procura no período $t+h$, é dada por

$$F_{t+h} = \hat{z}_{k+1} / \hat{v}_{k+1} \quad (2.6)$$

A estimativa sob a forma de intervalo de confiança não pode ser realizada de forma algébrica porque o método não corresponde a nenhum modelo estatístico (Shenstone e Hyndman, 2005).

É importante referir que os valores previstos não são efetivamente previsões da procura, mas sim uma taxa de procura. Uma vez que é difícil obter uma previsão pontual para cada período devido à natureza intermitente dos dados, a taxa de procura fornece ao decisor uma maior confiança dos resultados de previsão, em comparação com a previsão pontual. O pseudocódigo

do método de Croston está ilustrado no Algoritmo 4.

Algorithm 4: Método de Croston

Input: α, z_t, v_t, q
Output: F_{t+1}
início
 se $A_t = 0$ **então**
 $z_{t+1} \leftarrow z_t$;
 $v_{t+1} \leftarrow v_t$;
 $q \leftarrow q + 1$
 senão
 $z_{t+1} \leftarrow \alpha A_t + (1 - \alpha)z_t$;
 $v_{t+1} \leftarrow \alpha q + (1 - \alpha)v_t$;
 $q \leftarrow 1$;
 $\hat{F}_{t+1} = z_{t+1}/v_{t+1}$;
 return f_{t+1} ;

As decisões de reposição ocorrem apenas nos períodos após a ocorrência de procura e são baseadas na seguinte equação

$$S_{t+h} = \hat{z}_{k+1} + Km_{k+1}$$

em que S_t representa o nível de enchimento do inventário, K é o fator de segurança e m_t é a estimativa do desvio médio absoluto dos erros da dimensão da procura obtida por

$$m_{n+1} = \alpha|z_n - \hat{z}_n| + (1 - \alpha)m_n$$

Exemplo numérico

Neste exemplo aplicamos o método para as vendas mensais de uma peça automóvel de manutenção e reparação que raramente é vendida. O valor das vendas está ilustrado na Figura 2.30

As séries procura e tempo entre procuras, construídas a partir das vendas mensais estão indicadas na Tabela 2.7

Tabela 2.7 Séries procura e tempo entre procuras

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
z_n	2	1	1	6	1	4	1	2	1	3	3	5	3
v_n	2	4	3	1	2	1	5	2	1	5	7	1	2

Usando um valor de $\alpha = 0.1$, e inicializando as séries de amortecimento exponencial com $\hat{z}_1 = z_1$ e $\hat{v}_1 = v_1$ dá a previsão da procura de 2.546 e uma previsão tempo entre procuras de 2.369. Assim, a previsão da série original é $F_{t+h} = 0.965$.

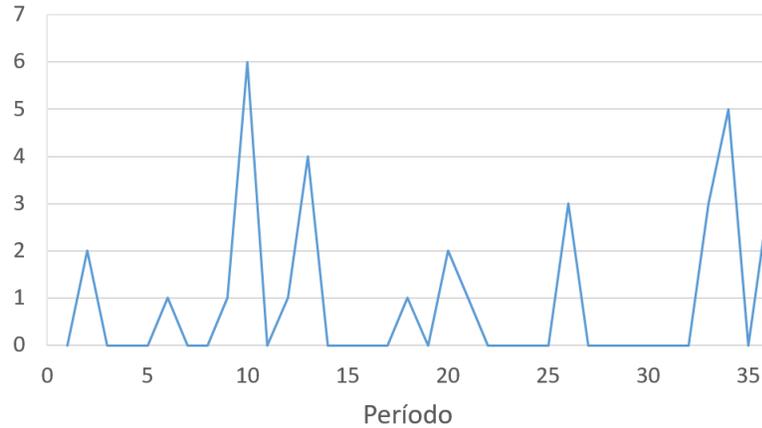


Figura 2.30 Vendas mensais

2.8.2 Variantes do método de Croston

O método de Croston apresenta um conjunto de limitações. A principal é que conduz a uma estimativa positivamente enviesada da procura por unidade de tempo. Desvantagens adicionais incluem a falta de parâmetros de amortecimento independentes para a dimensão da procura e o tamanho do intervalo entre procuras, e forma de lidar com a obsolescência do produto.

Syntetos-Boylan

Syntetos e Boylan, 2001 sugeriram uma modificação do método de Croston para ultrapassar o problema de enviesamento. Esta modificação, designada Syntetos-Boylan Approximation (SBA) consiste em ajustar a equação (2.6) multiplicando a estimativa por $1 - \alpha/2$, tornando a previsão aproximadamente não enviesada.

$$F_{t+h} = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\hat{z}_{k+1}}{\hat{v}_{K+1}}$$

Teunter, Syntetos e Babai

Uma modificação ao método de Croston que considera a diferenciação de parâmetros de amortecimento e a obsolescência é o método de Teunter, Syntetos e Babai (TSB) (Teunter, Syntetos e Babai, 2011). Este método difere dos métodos de Croston e do SBA, na medida em que estima a probabilidade de ocorrência de procura não-zero, em vez de estimar o tamanho do intervalo entre procuras. Deste modo, as estimativas são atualizadas a cada período e não apenas quando corre procura.

Seja p_t um indicador de uma procura não-zero no período t , \hat{p}_t a estimativa da probabilidade da ocorrência de procura para o período t então

Se $p_t = 0$:

$$\begin{aligned}\hat{p}_{t+1} &= \beta(1) + (1 - \beta)\hat{p}_t \\ \hat{z}_{t+1} &= \alpha A_t + (1 - \alpha)\hat{z}_t\end{aligned}$$

Se $p_t = 1$:

$$\begin{aligned}\hat{p}_{t+1} &= (1 - \beta)\hat{p}_t \\ \hat{z}_{t+1} &= \hat{z}_t\end{aligned}$$

As constantes de amortecimento α e β tomam valores entre 0 e 1 e a previsão para a procura no período $t + 1$, é dada por

$$F_{t+1} = \hat{z}_{t+1}\hat{p}_{t+1}$$

A principal vantagem deste método é que atualizar as previsões em cada período de tempo, independentemente se ocorre procura ou não, dado que permite que $hat{p}_t$ se aproxime de zero se não se registar qualquer procura durante um longo intervalo de tempo. Na prática, a TSB permite que se tome em cada período decisões sobre a necessidade de continuar a armazenar artigos.

2.8.3 A classificação dos padrões de procura irregulares

A classificação de padrões de procura facilita a seleção de um método de previsão e é um elemento essencial no estabelecimento de políticas de gestão de inventários.

A prática comum na indústria é categorizar arbitrariamente esses padrões de procura e de seguida selecionar e parametrizar um modelo de previsão.

Método de Williams

Williams, 1984 propôs um método de classificação de padrões de procura com base na ideia de partição de variância (i.e. dividir a variância da procura durante o lead time nas suas componentes). O objetivo das categorias é identificar os métodos de previsão e controlo de inventário mais adequadas para as categorias resultantes. A categorização é feita de acordo com a matriz mostrada na Figura 2.31. Os valores de corte são resultado de decisão da gestão.

Na matriz ilustrada a seguir, λ é a média da procura (Poisson), \bar{L} é a média de duração do lead time e $CV^2(x)$ o quadrado do coeficiente da variação da dimensão da procura. O CV é uma medida padronizada de dispersão de uma distribuição frequentemente expresso como uma percentagem, sendo definido como a razão do desvio padrão σ pela média μ .

$$c_v = \frac{\sigma}{\mu}$$

$1/\lambda\bar{L}$ indica o número lead times entre procuras (com que frequência a procura ocorre ou quão intermitente é). Quanto maior for a proporção, mais intermitente é a procura. $CV^2(x)/\lambda\bar{L}$ indica quão irregular é a procura. A irregularidade depende da intermitência e da variabilidade da dimensão da procura, quando ocorre procura. Quanto maior for a proporção mais irregular é a procura: categoria D1 - esporádica (irregular); categoria D2 - altamente esporádica (irregular). Nesse caso, temos poucas transações muito irregulares acompanhadas de dimensões de procura altamente variáveis; categoria B - lenta; outros - amortecida.

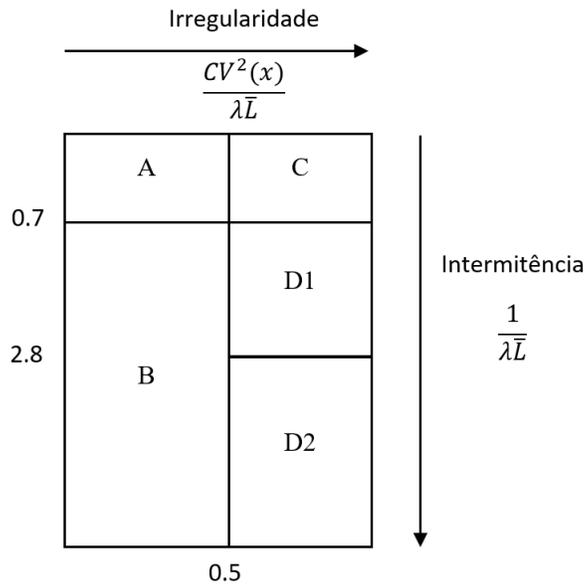


Figura 2.31 Método de categorização de Williams.

Apesar dos critérios utilizados para categorização serem significativos, o método apresenta como limitação o facto da determinação dos limites ser casuística.

Syntetos, Boylan e J. Croston, 2005 propõem um método diferente de classificação que entra em consideração com duas dimensões, o quadrado do coeficiente da variação da dimensão da procura o CV^2 e o intervalo entre procuras p .

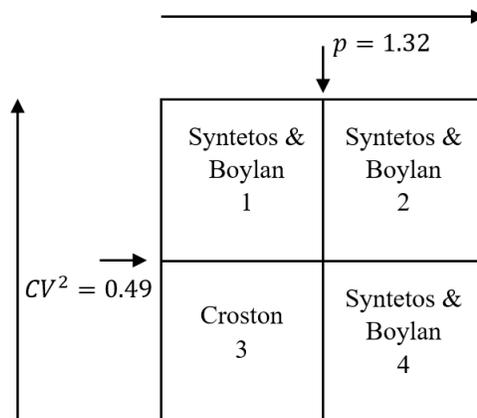


Figura 2.32 Método de categorização de Syntetos, Boylan e J. Croston, 2005.

Referências

- Box, G. e G. Jenkins (1976). *Time series analysis: forecasting and control, revised ed.* Holden-Day.
- Brown, Robert Goodell (1959). *Statistical forecasting for inventory control.* McGraw/Hill.
- Croston, J Do (1972). “Forecasting and stock control for intermittent demands”. Em: *Operational research quarterly*, pp. 289–303.
- Dahlhaus, Rainer et al. (1997). “Fitting time series models to nonstationary processes”. Em: *The annals of Statistics* 25.1, pp. 1–37.
- Dickey, David A e Wayne A Fuller (1979). “Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root”. Em: *Journal of the American statistical association* 74.366a, pp. 427–431.
- Hall, Alastair (1994). “Testing for a unit root in time series with pretest data-based model selection”. Em: *Journal of Business & Economic Statistics* 12.4, pp. 461–470.
- Holt, CE (1957). “Forecasting seasonals and trends by exponentially weighted averages (ONR Memorandum No. 52)”. Em: *Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh USA* 10.
- Hyndman, Rob J et al. (2006). “Another look at forecast-accuracy metrics for intermittent demand”. Em: *Foresight: The International Journal of Applied Forecasting* 4.4, pp. 43–46.
- Kwiatkowski, Denis et al. (1992). “Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic time series have a unit root?” Em: *Journal of econometrics* 54.1-3, pp. 159–178.
- Lasdon, Leon S, Richard L Fox e Margery W Ratner (1974). “Nonlinear optimization using the generalized reduced gradient method”. Em: *Revue française d’automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle* 8.V3, pp. 73–103.
- Ng, Serena e Pierre Perron (1995). “Unit root tests in ARMA models with data-dependent methods for the selection of the truncation lag”. Em: *Journal of the American Statistical Association* 90.429, pp. 268–281.
- Phillips, Peter CB e Pierre Perron (1988). “Testing for a unit root in time series regression”. Em: *Biometrika* 75.2, pp. 335–346.
- Said, Said E e David A Dickey (1984). “Testing for unit roots in autoregressive-moving average models of unknown order”. Em: *Biometrika* 71.3, pp. 599–607.
- Schwert, G William (1989). “Tests for unit roots: A Monte Carlo investigation”. Em: *Journal of Business & Economic Statistics* 7.2, pp. 147–159.
- Shenstone, Lydia e Rob J Hyndman (2005). “Stochastic models underlying Croston’s method for intermittent demand forecasting”. Em: *Journal of Forecasting* 24.6, pp. 389–402.
- Syntetos, Aris A e John E Boylan (2001). “On the bias of intermittent demand estimates”. Em: *International journal of production economics* 71.1-3, pp. 457–466.

- Syntetos, Aris A, John E Boylan e JD Croston (2005). “On the categorization of demand patterns”. Em: *Journal of the Operational Research Society* 56.5, pp. 495–503.
- Teunter, Ruud H, Aris A Syntetos e M Zied Babai (2011). “Intermittent demand: Linking forecasting to inventory obsolescence”. Em: *European Journal of Operational Research* 214.3, pp. 606–615.
- Williams, TM (1984). “Stock control with sporadic and slow-moving demand”. Em: *Journal of the Operational Research Society*, pp. 939–948.
- Winters, Peter R (1960). “Forecasting sales by exponentially weighted moving averages”. Em: *Management science* 6.3, pp. 324–342.

Apêndice A

Tabelas

A.1 Valores críticos para o teste de Dickey-Fuller

Valores críticos para a distribuição estatística de Dickey-Fuller, para amostras de dimensão n e níveis de significância α (os valores indicados são para testes unilaterais à esquerda são aproximados)

Tabela A.1 Valores críticos da distribuição estatística τ de Dickey-Fuller

n	Valores críticos			
	α			
	0.010	0.025	0.050	0.100
Modelo I				
25	-2.661	-2.273	-1.955	-1.609
50	-2.612	-2.246	-1.947	-1.612
100	-2.588	-2.234	-1.944	-1.614
250	-2.575	-2.227	-1.942	-1.616
500	-2.570	-2.224	-1.942	-1.616
>500	-2.567	-2.223	-1.941	-1.616
Modelo II				
25	-3.724	-3.318	-2.986	-2.633
50	-3.568	-3.213	-2.921	-2.599
100	-3.498	-3.164	-2.891	-2.582
250	-3.457	-3.136	-2.873	-2.573
500	-3.443	-3.127	-2.867	-2.570
>500	-3.434	-3.120	-2.863	-2.568
Modelo III				
25	-4.375	-3.943	-3.589	-3.238
50	-4.152	-3.791	-3.495	-3.181
100	-4.052	-3.722	-3.452	-3.153
250	-3.995	-3.683	-3.427	-3.137
500	-3.997	-3.670	-3.419	-3.132
>500	-3.963	-3.660	-3.413	-3.128

